

**Claire BRANS
Myriam CORNET
Nicole COUSSAERT
Arlette DAMBREMEZ
Eveline FOREST
Liliane GUSMAN**

La conservation de la quantité de mouvement

Atelier de physique coordonné par Guy Gusman



Les Cahiers du CeDoP

Le présent document est protégé par la législation sur le droit d'auteur. Il ne peut faire l'objet d'aucune reproduction, sous quelque support que ce soit, ni d'aucune communication au public, sous quelque forme que ce soit et moyennant quelque procédé technique que ce soit, sans l'autorisation expresse du titulaire du droit d'auteur.

© Université Libre de Bruxelles, 2001, pour l'édition graphique et la publication en ligne

Préface

Qui d'entre nous n'a pas joué ou regardé jouer au billard ? C'est en regardant des collisions que, historiquement, l'idée de la conservation de la quantité de mouvement est apparue chez Beeckman, un des admirateurs de Descartes.

Prenons, par exemple, un choc frontal entre deux billes de même masse, celle qui était initialement à l'arrêt se met en mouvement et part avec exactement la quantité de mouvement de la bille incidente qui, elle, s'arrête. De façon générale, un système isolé formé de deux billes de billard ou de deux points matériels, comme un proton et son électron périphérique dans un atome d'hydrogène, voit la somme des quantités de mouvement rester constante bien que chacun des deux constituants évolue. La loi physique qui est à l'origine de ce comportement s'applique quelle que soit la nature des objets qui forment le système, qu'ils soient libres comme les billes de billard ou qu'ils forment un état lié comme l'atome d'hydrogène. Il apparaîtra plus tard que cette loi de la conservation de la quantité de mouvement, comme celle de l'énergie d'ailleurs, s'applique à tout système isolé, quelle que soit la nature des interactions entre ses constituants, qu'ils soient deux ou en nombre immense, qu'ils soient décrits par la mécanique classique, relativiste ou quantique. C'est une conséquence de l'invariance par translation de l'espace.

Ce concept a mis longtemps à être compris et il n'est pas étonnant qu'ils soit toujours considéré comme difficile à enseigner par les professeurs et à maîtriser par les étudiants. Peut-être parce que l'on y manipule simultanément un vecteur (la quantité de mouvement) et un scalaire (l'énergie cinétique). Une fois de plus, l'atelier a essayé de tirer le meilleur parti de l'expérience pédagogique de ses membres en présentant les notions de façon progressive. De nombreuses applications sont proposées sous forme de problèmes résolus pour mettre en valeur l'intérêt de cette loi de conservation. Comme dans les cinq brochures précédentes, nous avons essayé de traiter des problèmes concrets se rapportant à des situations qui se rencontrent effectivement dans notre environnement et nous terminons notamment par le principe de la tomographie à émission de positrons, TEP, technique largement utilisée actuellement en imagerie médicale.

Guy GUSMAN



Table des matières

1. INTRODUCTION	4
2. CENTRE DE MASSE	5
3. QUANTITÉ DE MOUVEMENT	8
3.1. <i>Mouvement du centre de masse</i>	8
3.2. <i>Variation de la quantité de mouvement d'un système</i>	9
3.3. <i>Relation entre la variation de la quantité de mouvement et l'impulsion reçue</i>	11
3.4. <i>Conservation de la quantité de mouvement</i>	13
4. COLLISIONS ÉLASTIQUES ET INÉLASTIQUES	17



1. Introduction

Dans la brochure de dynamique, nous nous sommes intéressés aux mouvements d'un tout petit nombre d'objets. Si le système est formé de très nombreuses masses, le problème de la **dynamique individuelle** de chacune des masses devient rapidement très compliqué ou même insoluble. Mais on peut tirer des **informations globales** en s'intéressant au système plutôt qu'à chacun de ses constituants. Par exemple, au lieu d'observer les 6.10^{23} molécules d'une mole de gaz, on regardera le système dans son ensemble comme si la masse totale des molécules se ramenait en un point : le centre de masse du système. Ceci nous permettra de faire des prévisions au niveau de l'ensemble du système, sans devoir retirer ces informations globales d'une description microscopique.

La quantité de mouvement apparaîtra par la suite comme beaucoup plus fondamentale que la vitesse. D'autre part, elle est à la base de l'écriture de la mécanique quantique, c'est-à-dire la mécanique qui convient à la description des objets de la taille du proton et de l'électron. Dans cette description, la conservation de la quantité de mouvement résulte d'une symétrie : l'invariance des lois physiques par rapport à une translation dans l'espace, en particulier par rapport à l'observateur. La quantité de mouvement est conservée à cause de l'homogénéité de l'espace, une conséquence de la deuxième loi de Newton qui précise qu'à toute force d'action correspond une autre force en retour égale et opposée. Si la première induit une variation, forcément, quelque part dans l'Univers, une variation de $-\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$ est produite simultanément et, au total, la quantité de mouvement de l'Univers est invariante.



2. Centre de masse

Soit un système composé de N objets. Ceux-ci sont soumis à des forces intérieures (exercées entre les objets du système) et des forces extérieures (exercées par des objets n'appartenant pas au système). Plus le nombre d'objets composant le système est grand, plus la résolution du système des équations de Newton sera longue et pénible. Elle pourrait même dépasser la capacité de calcul des ordinateurs actuels les plus performants.

Afin d'éviter ces difficultés, nous remplaçons l'ensemble des N objets par un point matériel :

- De masse M égale à la masse totale des N objets :

$$M = \sum_{j=1}^N m_j \quad (2.1)$$

- Situé en un point appelé le **centre de masse** C.M. (ou barycentre) dont la position est donnée par le vecteur $\vec{r}_{C.M.}$:

$$\vec{r}_{C.M.} = (x_{C.M.}, y_{C.M.}, z_{C.M.}) \quad (2.2)$$

Ces coordonnées valent respectivement :

$$\begin{aligned} x_{C.M.} &= \frac{m_1 x_1 + \dots + m_N x_N}{m_1 + \dots + m_N} \\ y_{C.M.} &= \frac{m_1 y_1 + \dots + m_N y_N}{m_1 + \dots + m_N} \\ z_{C.M.} &= \frac{m_1 z_1 + \dots + m_N z_N}{m_1 + \dots + m_N} \end{aligned} \quad (2.3)$$

ce que l'on résume par : $\vec{r}_{C.M.} = \frac{\sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j}{\sum_{j=1}^N m_j}$ (2.4)

Remarques :

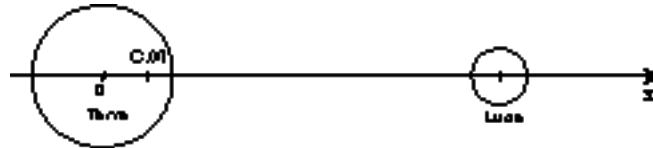
- Si le système est constitué de deux objets seulement, le C.M. sera toujours plus près du C.M. de celui qui a la masse la plus importante. Il sera par contre au milieu des deux si les deux objets sont identiques.

- Souvent la symétrie du système, s'il y en a une, permet de deviner la position du C.M. Pour une sphère homogène, par exemple, il se trouve en son centre.



Exemple 1 C.M. du système Terre Lune

Cherchons à quelle distance du centre de la Terre se trouve le C.M. du système Terre Lune, sachant que la distance Terre Lune vaut $3,88 \cdot 10^8$ m, la masse de la Lune $7,35 \cdot 10^{22}$ kg et celle de la Terre $5,98 \cdot 10^{24}$ kg.



D'après (2.3), en prenant l'origine de l'axe Ox au centre de la Terre,

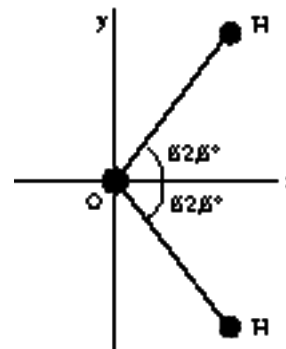
$$x_{C.M.} = \frac{m_T x_T + m_L x_L}{m_T + m_L} = \frac{m_T \cdot 0 + (7,35 \cdot 10^{22}) \cdot (3,88 \cdot 10^8)}{5,98 \cdot 10^{24} + 7,35 \cdot 10^{22}} \sim 4,71 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Le C.M. cherché se trouve à environ 4700 km de O placé au centre de la Terre, c'est-à-dire à l'intérieur de la Terre environ à 1700 km en dessous du niveau du sol.

En fait, la Lune, comme la Terre tournent toutes deux autour du C.M. du système qui ne coïncide pas avec celui de la Terre.

Exemple 2 C.M. d'une molécule d'eau

Dans la molécule d'eau, la distance entre l'atome d'oxygène et chacun des atomes d'hydrogène vaut 9,58 nm et l'angle entre les deux liaisons oxygène hydrogène est égal à 105° . En considérant les atomes comme des particules, et sachant que les masses atomiques de l'oxygène et de l'hydrogène valent respectivement 15,994915 u et 1,007825 u, trouver le C.M. de la molécule.



Ce problème peut être ramené à un problème à 1 dimension. En effet, à cause de la symétrie, on sait que le C.M. est sur l'axe x, donc que $y_{C.M.} = 0$.

Il suffira donc de chercher la valeur de $x_{C.M.}$, en utilisant à nouveau (2.3) :

$$x_{C.M.} = \frac{m_O x_O + 2m_H x_H}{m_O + 2m_H} = \frac{m_O \cdot 0 + 2 \cdot 1,007825 \cdot 9,58 \cdot 10^{-9} \cdot \cos 52,5^\circ}{15,994915 + 2 \cdot 1,007825}$$

d'où : $x_{C.M.} \sim 0,65 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 0,65 \text{ nm}$

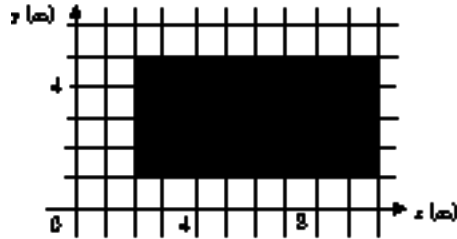
La position du C.M. de la molécule d'eau est donnée, en nm, par :

$$\vec{r}_{\text{C.M.}} = (0,65 ; 0)$$

et l'on constate, comme on pouvait le prévoir, que le C.M. de la molécule est proche du C.M. de l'atome d'oxygène qui est le plus lourd.

Exemple 3 C.M. d'une plaque évidée

Trouver la position du C.M. d'une plaque d'acier rectangulaire, d'épaisseur constante, homogène, et qui est évidée comme le montre le dessin ci-contre.



Pour des raisons de symétrie, $z_{\text{C.M.}}$ se trouve à mi-épaisseur de la plaque. Appelons m la masse du morceau manquant dont le C.M. a pour coordonnées (5 ; 2,5). Tout se passe comme si le morceau enlevé avait une masse négative. La plaque entière avait initialement une masse de $16m$ et son C.M. avait pour coordonnées, en mètres, (6,3). Déterminons les coordonnées du C.M. de la plaque évidée :

$$x_{\text{C.M.}} = \frac{(16m) \cdot 6 + (-m) \cdot 5}{16m + (-m)} = \frac{91m}{15m} = 6,07 \text{ m}$$

$$y_{\text{C.M.}} = \frac{(16m) \cdot 3 + (-m) \cdot 2,5}{16m + (-m)} = \frac{45,5m}{15m} = 3,03 \text{ m}$$

La position du C.M. de la plaque évidée d'un seizième de sa masse totale n'est que légèrement différente de la position du C.M. de la plaque entière. Nous avons choisi une méthode rapide, mais on pourrait diviser la plaque évidée en quatre morceaux rectangulaires et chercher le C.M. du système formé par ces 4 morceaux. À titre d'exercice, vérifiez que l'on obtient le même résultat.

3. Quantité de mouvement

3.1. Mouvement du centre de masse

Nous avons déjà évoqué le fait que, si le système est formé de très nombreuses masses, le problème de la dynamique individuelle de chacune des masses devient rapidement très compliqué. Mais on peut tirer des informations globales sur le mouvement du système. Lançons par exemple une pierre et demandons-nous quel est le mouvement de son centre de masse. Il est donné par :

$$\vec{v}_{\text{C.M.}} = \frac{d\vec{r}_{\text{C.M.}}}{dt} = \frac{\sum_{j=1}^N m_j \frac{d\vec{r}_j}{dt}}{\sum_{j=1}^N m_j} = \frac{\sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j}{M} \quad (3.1)$$

On voit que ce sont les produits $m_j \vec{v}_j$ de chacun des objets qui interviennent. Donnons-leur un nom et introduisons une nouvelle grandeur, $\vec{p}_j = m_j \vec{v}_j$, la **quantité de mouvement** associée à l'objet j . Dès lors :

$$\vec{v}_{\text{C.M.}} = \frac{\sum_{j=1}^N \vec{p}_j}{M}$$

et, finalement :

$$\boxed{M\vec{v}_{\text{C.M.}} = \vec{P}_{\text{C.M.}} = \sum_{j=1}^N \vec{p}_j} \quad (3.2)$$

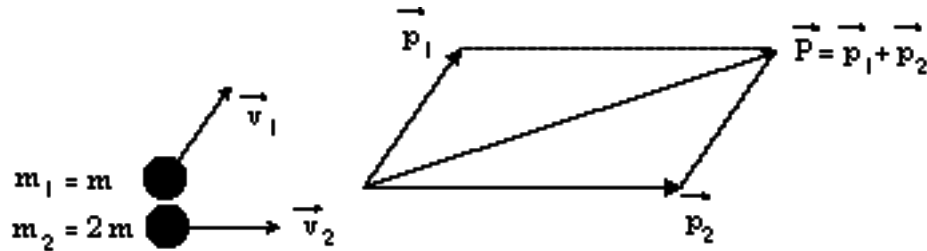
On a remplacé le système de N objets par un seul objet de masse M se trouvant au C.M. et dont la quantité de mouvement, $\vec{P}_{\text{C.M.}}$, est la somme des quantités de mouvement de chacun des N objets du système ; par la suite, pour alléger l'écriture, nous l'appellerons \vec{P} . Les quantités de mouvement s'additionnent suivant les règles de l'algèbre vectorielle. Dans le SI, l'unité de quantité de mouvement est le kg.m.s^{-1} .

Jusqu'à présent, cette nouvelle grandeur \vec{P} paraît introduite comme un jeu mathématique, mais comme on le verra dans le paragraphe suivant, elle se justifie par son efficacité.



Exemple 4 Quantité de mouvement totale du système de deux billes

Un système est formé de deux billes de masses respectives m et $2m$ et de vitesses représentées ci-dessous. Construisons en un point la quantité de mouvement de chacune des billes et celle du système.



Remarque :

Si nous avons affaire à **de grandes vitesses** (mécanique relativiste), c'est-à-dire proches de celle de la lumière, c , la quantité de mouvement est toujours exprimée par $\vec{p} = m\vec{v}$, mais la masse change avec la vitesse selon la loi :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

où m_0 est la masse du corps au repos. Cette formule montre que l'écart entre m et m_0 est négligeable tant que v n'est pas très grand par rapport à c . Pour des vitesses ordinaires faibles, telles que $v^2/c^2 \ll 1$, nous retrouvons $m \cong m_0 = \text{constante}$.

3.2. Variation de la quantité de mouvement d'un système

Pour voir comment \vec{P} varie au cours du temps, calculons sa dérivée par rapport au temps. Nous nous limiterons ici au cas de vitesses suffisamment petites pour que les masses soient constantes. À partir de (3.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &= \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \frac{d\vec{p}_3}{dt} + \dots \\ &= m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} + m_3 \frac{d\vec{v}_3}{dt} + \dots \\ &= m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + m_3 \vec{a}_3 + \dots \\ \frac{d\vec{P}}{dt} &= \vec{F}_{\text{ext},1} + \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{3,1} + \dots + \vec{F}_{\text{ext},2} + \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{3,2} + \dots + \vec{F}_{\text{ext},3} + \vec{F}_{1,3} + \vec{F}_{2,3} + \dots \end{aligned}$$

où nous avons distingué les forces extérieures au système des forces intérieures.

Comme d'après la 3e loi de Newton les forces intérieures se compensent exactement,

par exemple, $\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{2,1} = \vec{0} \dots$, le problème se simplifie énormément et l'on obtient :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{\text{ext } j} = \vec{F}_{\text{ext}} \quad (3.3)$$

Seules les forces extérieures agissant sur le système peuvent en modifier la quantité de mouvement.

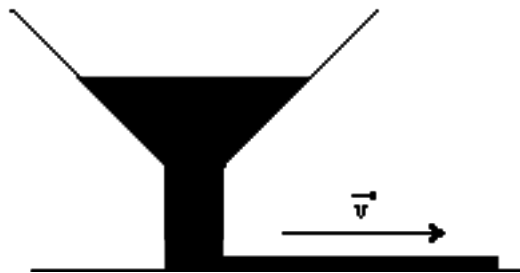
Exemple 5 Démarrage d'une voiture

Une voiture de 720 kg atteint la vitesse de 100 km/h en 10 secondes, départ arrêté. Quelle est la force motrice moyenne $\langle F \rangle$ exercée au cours de ce laps de temps ? (La force motrice réelle peut varier au cours de ces 10 secondes).

$$\langle F \rangle = \frac{dP}{dt} = m \frac{dv}{dt} \langle F \rangle = 720 \frac{100}{3,6} \frac{1}{10} = 2\,000 \text{ N}$$

Exemple 6 Trémie

Une trémie laisse tomber du grain avec un débit de dm/dt sur un convoyeur à bande qui avance à la vitesse constante v . Quelle est la puissance fournie par le moteur pour entraîner la bande ?



Considérons comme système la bande de masse variable m . La force requise pour maintenir le système à vitesse constante est d'après (3.3) :

$$F = \frac{dP}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dm}{dt} v$$

d'où la puissance P fournie par le moteur pour entraîner la bande qui avance à la vitesse constante v :

$$P = F v = v^2 \frac{dm}{dt} = \frac{d(mv^2)}{dt} = 2 \frac{dK}{dt}$$

La puissance nécessaire pour entretenir le mouvement de la bande vaut donc le double du taux d'accroissement de l'énergie cinétique des grains par rapport au temps. La différence se retrouve dans le travail des forces des frottements (chaleur) nécessaire pour entraîner les grains sur la bande.

3.3. Relation entre la variation de la quantité de mouvement et l'impulsion reçue

Envisageons le cas d'un objet de masse m soumis à une force extérieure résultante \vec{F}_{ext} pendant une très courte durée. Ceci est souvent le cas lors d'un choc.

Cette force provoque la modification de sa quantité de mouvement $d\vec{P}$ qui vaut suivant (3.3) :

$$d\vec{P} = \vec{F}_{\text{ext}} dt$$

Au bout d'un temps macroscopique, la variation de \vec{P} s'obtiendra par intégration :

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{\text{ext}} dt \quad (3.4)$$

L'intégrale de la force sur l'intervalle de temps pendant lequel elle agit est appelée **impulsion** fournie par la force pendant ce temps.

Remarque :

Pour une variation donnée de la vitesse, le choc est d'autant plus violent qu'il est bref. Si l'on veut éviter à un corps de subir des forces trop importantes, il faut trouver un moyen d'allonger la durée du choc ; on peut, par exemple l'enrober d'une substance qui s'écrase progressivement. La déformation de la carrosserie d'une voiture joue le même rôle ; en allongeant la durée du choc, on protège les passagers.

Exemple 7 Choc sur une balle de golf

Une balle de golf de 0,47 kg initialement au repos est frappée de plein fouet par le club d'un joueur. Supposons que l'on puisse remplacer la force appliquée par une force constante de 5640 N pendant le temps de contact de 1 ms. Quelle est la vitesse de la balle immédiatement après le choc ?

La balle reçoit une impulsion de valeur :

$$F \Delta t = 5640 \cdot 10^{-3} \text{ N.s}$$

qui modifie sa quantité de mouvement de $m \Delta v$.

La vitesse de la balle varie donc de :

$$\Delta v = \frac{F \Delta t}{m} = \frac{1}{0,47} \cdot 5640 \cdot 10^{-3} = 12 \text{ m.s}^{-1}$$

Comme la balle a une vitesse initiale nulle, sa vitesse immédiatement après le choc vaut $v_f = 12 \text{ m.s}^{-1} \cong 43 \text{ km/h}$.

Exemple 8 Force exercée sur les jambes d'une personne qui saute d'un toit

Un homme de 60 kg retombe sur le sol après avoir sauté d'un toit situé à 6 m de haut. Estimons la force moyenne exercée sur les jambes de cet homme qui atterrit sur ses deux



pieds. Tout d'abord, s'il touche le sol les jambes raides, seule l'élasticité des os, cartilages... lui permet de décélérer sur une distance de 1 cm environ. Comme les forces sont vraiment très grandes, regardons ce qui se passe s'il amortit sa chute en pliant les genoux, dans ce cas son C.M. s'abaisse de 50 cm environ.

Après une chute de 6 m, la composante verticale v_y de la vitesse de l'homme vaut environ :

$$v_y = \sqrt{2gy} \cong \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 6,1} = 11 \text{ m/s}$$

Au cours de l'immobilisation, la quantité de mouvement de l'homme passe de $60 \cdot 11 = 660 \text{ N}\cdot\text{s}$ à 0.

En s'immobilisant les jambes raides, le C.M. de l'homme ralentit de 11 m/s à 0 sur une distance de 1 cm soit 0,01 m.

Si la décélération est constante, la vitesse moyenne vaut : $(11 + 0)/2 = 5,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, ce qui permet d'estimer la durée du choc à $\Delta t = 0,01/5,5 = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

La force moyenne a ainsi pour valeur:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{660}{1,8 \cdot 10^{-3}} = 3,63 \cdot 10^5 \text{ N}$$

Cette force agissant vers le haut est la résultante de la force moyenne exercée par le sol sur les jambes de l'homme (force dirigée vers le haut) et de la force de gravitation (de 600 N environ et dirigée vers le bas), qui est négligeable par rapport à la force moyenne exercée par le sol sur les jambes de l'homme.

En pliant les genoux pendant l'immobilisation, le C.M. de l'homme ralentit de 11 m/s à 0 sur une distance de 50 cm soit 0,5 m. La vitesse moyenne vaut toujours $5,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, mais la durée du choc vaut maintenant $\Delta t = 0,5/5,5 = 9 \cdot 10^{-2} \text{ s}$. La force moyenne a ainsi une valeur 50 fois plus petite que précédemment, en effet :

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{660}{9 \cdot 10^{-2}} = 7,33 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Cette force agissant vers le haut est la résultante de la force moyenne exercée par le sol sur les jambes de l'homme et de la force de gravitation de 600 N environ, qui n'est plus négligeable en comparaison de la force moyenne exercée par le sol sur les jambes de l'homme qui vaut donc environ $8 \cdot 10^3 \text{ N}$.

En conclusion, cette force de 8 000 N qui s'exerce genoux pliés est nettement plus faible que les 363 000 N trouvés lors de l'immobilisation jambes raides et plier les genoux évite sans doute une fracture des tibias.



3.4. Conservation de la quantité de mouvement

D'après (3.3), si la force extérieure résultante \vec{F}_{ext} qui s'exerce sur un système est nulle, sa quantité de mouvement totale \vec{P} reste constante. Il s'agit de la loi de conservation de la quantité de mouvement.

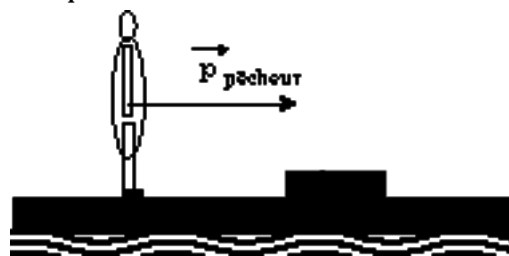
Dans ce cas, la vitesse du C.M., $\vec{v}_{\text{C.M.}}$, reste constante (voir exemple 10).

La loi de conservation de la quantité de mouvement permet notamment de **déterminer des vitesses de recul ou de propulsion** (arme à feu, engin équipé d'un turboréacteur, fusée, pieuvre, calmar, poulpe, coquille Saint-Jacques...) puisque, lorsque plusieurs objets formant un système isolé se détachent les uns des autres, la quantité de mouvement de chacun d'eux varie sous l'action des forces intérieures, mais la quantité de mouvement totale du système \vec{P} est la même tout de suite avant et tout de suite après l'événement. Il est important de remarquer qu'il s'agit d'une relation vectorielle qui peut être utilisée en projections et, que dès lors, le choix d'un bon repère est important.

Exemple 9 Vitesse de recul d'un radeau

Un pêcheur de 80 kg est debout à l'arrière d'un radeau de 120 kg immobile au milieu d'un étang. Le pêcheur se met à marcher de l'arrière vers l'avant du radeau parallèlement à une berge de l'étang à la vitesse de $1,5 \text{ m.s}^{-1}$ par rapport à la berge. À quelle vitesse le système radeau se déplace-t-il par rapport à cette berge, dans l'approximation où l'on néglige les forces de frottement entre l'eau et le radeau ? Que peut-on dire du mouvement du C.M. par rapport à la berge ?

La quantité de mouvement totale du radeau et du pêcheur était initialement nulle, elle le reste donc ; d'où : $\vec{0} = \vec{p}_{\text{pêcheur}} + \vec{p}_{\text{radeau}}$.



Comme les deux quantités de mouvement ont même direction, mais sont de sens opposés, il vient :

$$\vec{v}_{\text{radeau}} = -\frac{m_{\text{pêcheur}}}{m_{\text{radeau}}} \vec{v}_{\text{pêcheur}}$$

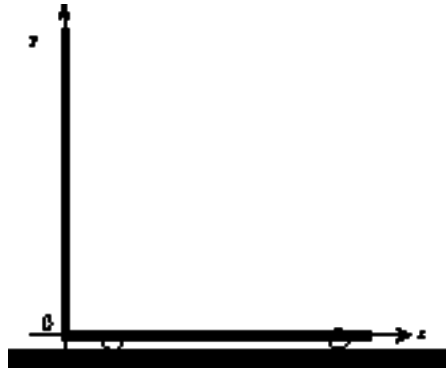
La vitesse du radeau par rapport à la berge vaut :

$$v_{\text{radeau}} = \frac{80}{120} 1,5 = 1 \text{ m.s}^{-1}$$

Le C.M. du système est resté immobile pendant le déplacement du pêcheur puisque la $\Sigma \vec{F}_{\text{ext}}$ est égale à $\vec{0}$.

Exemple 10 Recul d'un chariot

Lors du rangement d'un chariot, un manutentionnaire en libère le manche de 1 m de haut et de 1 kg, initialement vertical, qui bascule et retombe sur la planche horizontale de 1 m de long et de 4 kg (nous négligerons le poids des roues). Cherchons de quelle distance recule le chariot initialement immobile et libre de se mouvoir sans frottements sur un sol horizontal.



Voici un exemple d'un système, le chariot, qui est formé de deux sous-systèmes, le plateau et le manche. Chacun des deux sous-systèmes va se déplacer lors de la chute du manche, mais, comme aucune force horizontale n'est exercée sur le chariot, la coordonnée suivant x du C.M. ne change pas.

Les coordonnées respectives initiales suivant x des C.M. de la planche et du manche sont :

$$x_{PL} = 0,5 \text{ m} \quad \text{et} \quad x_{MA} = 0 \text{ m}$$

et celle du système :

$$x_{PL+MA} = \frac{m_{PL} \cdot x_{PL} + m_{MA} \cdot x_{MA}}{m_{PL} + m_{MA}} = \frac{4 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0}{5} = \frac{2}{5} = 0,4 \text{ m}$$

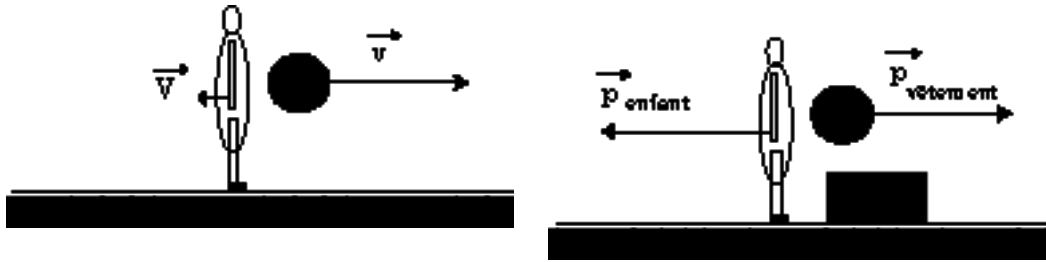
Le manche et la planche ayant la même longueur, une fois le manche rabattu, le C.M. du chariot se trouve au milieu, en $x_{PL+MA} = 0,5 \text{ m}$.

Le chariot a donc reculé de $0,5 \text{ m} - 0,4 \text{ m} = 0,1 \text{ m}$ pour que la coordonnée suivant x de son C.M. ne change pas.

Exemple 11 Vitesse de recul d'un enfant

Un enfant de masse M se trouve en difficulté sur un lac gelé avec des chaussures dont les semelles sont particulièrement lisses. Il comprend que la somme des forces qui s'exercent sur lui est nulle et que, s'il veut rejoindre la berge, c'est-à-dire modifier sa quantité de mouvement, il peut retirer un vêtement de masse m et le lancer pour profiter du recul qui en résulte.





En effet, le calcul qui suit le confirme :

$$\vec{0} = m\vec{v} + (M - m)\vec{V}$$

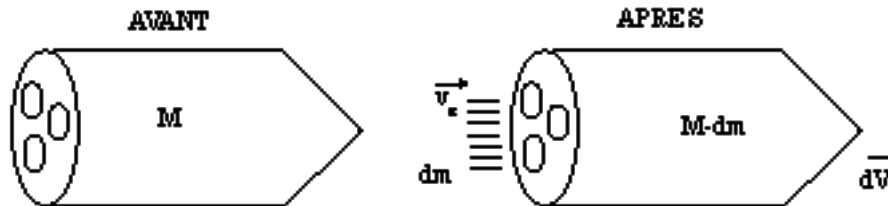
$$\vec{V} = -\vec{v} \frac{m}{M - m}$$

On voit que les vitesses du vêtement et de l'enfant ont même direction et sont de sens opposés, quant à leurs valeurs, il vient :

$$V = v \frac{m}{M - m}$$

Exemple 12 Vitesse de propulsion d'une fusée

La vitesse acquise par une fusée est due à l'expulsion à grande vitesse des gaz produits par la combustion du carburant.



Suivons le même schéma de résolution que dans le problème précédent.

Dans le repère dont l'origine est placée au C.M du système, on a :

$$\vec{0} = dm \vec{v}_e + (M - dm) d\vec{V}$$

où dm est la masse du gaz expulsé.

En supprimant le produit des deux infiniment petits, il vient successivement :

$$\begin{aligned} \vec{0} &= dm \vec{v}_e + M d\vec{V} \\ d\vec{V} &= -\vec{v}_e \frac{dm}{M} \end{aligned}$$

soit, en passant aux valeurs absolues des vitesses :

$$dV = v_e \frac{dm}{M}$$

Mais, comme une masse (positive) de gaz éjecté correspond à une diminution de la masse de la fusée, nous remplacerons dm par $-dM$. Nous allons finalement intégrer pour trouver la vitesse de la fusée après consommation de carburant, la masse de la fusée étant passée de M_0 à M .



$$dV = -v_e \frac{dM}{M}$$
$$V = \int_0^V dV = -v_e \int_{M_0}^M \frac{dM}{M}$$

ce qui donne l'expression finale :

$$V = v_e \ln \frac{M_0}{M}$$

Ceci montre que la vitesse atteinte par une fusée est directement proportionnelle à la vitesse d'expulsion des gaz. Mais elle croît comme le logarithme du rapport des masses. Ceci implique qu'il faut emporter une quantité énorme de carburant pour atteindre, par exemple, la vitesse de libération qui à la surface de la Terre vaut environ 11 km/s.



4. Collisions élastiques et inélastiques

La loi de conservation de la quantité de mouvement se montre également très utile pour **analyser certains événements** compliqués tels que collisions, chocs, explosions...

Remarques :

1. Malgré la présence fréquente de forces extérieures (par exemple frottement sur le sol en cas de collision de voitures), on utilise la loi de conservation de la quantité de mouvement car, dans de nombreuses situations, l'impulsion associée aux forces extérieures est négligeable par rapport aux quantités de mouvement en jeu.

2. Lorsqu'un objet explose en 2 morceaux, ceux-ci se déplacent le long d'une droite (1 dimension), s'il explose en 3 morceaux, leurs trajectoires se situent dans un plan (2 dimensions). Par contre, s'il y a plus de 3 morceaux, leurs trajectoires se situent dans l'espace à 3 dimensions.

Chaque fois que survient une collision entre deux corps d'un système isolé, la quantité de mouvement totale est conservée, ainsi que son énergie totale qui peut cependant prendre plusieurs formes ; c'est ainsi qu'une partie de l'énergie cinétique peut se transformer par exemple en chaleur ou en travail de déformation. Nous dirons qu'il s'agit d'une **collision inélastique**.

Dans certaines collisions, l'énergie cinétique totale des deux corps est conservée, il s'agit alors d'une **collision élastique**. C'est une excellente approximation qu'on utilise notamment dans la résolution de problèmes de collisions entre atomes, noyaux et particules élémentaires mais aussi, par exemple, entre billes d'acier et boules de billard.

Lorsque deux objets restent en contact après s'être heurtés, on parlera d'un **choc mou** ou encore d'une **collision parfaitement inélastique**. Dans ce cas, les deux objets qui restent accolés ont une vitesse relative nulle.

Montrons que, dans le cas d'une **collision élastique à 1 dimension**, la vitesse relative des deux objets 1 et 2 a la même valeur avant et après la collision, quelles que soient leurs masses.

La conservation de la quantité de mouvement nous apprend que :

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

En projetant cette relation vectorielle sur la direction du déplacement, on a :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (4.1)$$

où les coordonnées v_1, v_2, v'_1 et v'_2 des vecteurs vitesses peuvent être $> 0, < 0$ ou nulles.



Comme cette collision est élastique, on a également :

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 \quad (4.2)$$

Les équations (4.2) et (4.1) peuvent respectivement se mettre sous la forme :

$$m_1(v_1^2 - v_2^2) = m_2(v_2'^2 - v_1'^2) \quad (4.3)$$

$$m_1(v_1 + v_2) = m_2(v_2' + v_1') \quad (4.4)$$

En divisant (4.3) par (4.4), on a :

$$v_1 - v_2 = v_2' - v_1'$$

ou encore
$$\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} = -1 \quad (4.5)$$

on constate que la vitesse relative avant et après le choc des deux objets change de sens mais pas de norme.

De manière plus générale, le **coefficient de restitution e** mesure le degré d'inélasticité du choc et est caractéristique des corps qui se heurtent :

$$\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} = -e \quad (4.6)$$

On a vu que, dans le cas de la collision élastique étudiée ci-dessus, e vaut 1. Si on applique la relation (4.6) à un choc non élastique à 1 dimension, on trouvera que $0 = e < 1$, la valeur 0 correspond au choc mou.

Exemple 13 Collision élastique frontale entre deux billes

Une bille noire de 0,2 kg, lancée à la vitesse de 12 m.s⁻¹, cogne une bille blanche de 0,05 kg alors immobile. Le choc est élastique et, juste après, les deux billes se déplacent dans la même direction. Calculons la vitesse des deux billes à ce moment en nous servant de l'étude du choc élastique à une dimension qui précède :

D'après (4.1) :

$$m_N v_N = m_N v_N' + m_B v_B'$$

soit,
$$0,2 \cdot 12 = 0,2 v_N' + 0,05 v_B'$$

$$2,4 = 0,2 v_N' + 0,05 v_B'$$

D'après (4.5) :

$$\frac{v_N' - v_B'}{v_N} = -1$$

soit,
$$v_B' = v_N' + 12$$

d'où :
$$2,4 = 0,2 v_N' + 0,05 (v_N' + 12)$$

et les vitesses des billes noire et blanche auront respectivement pour valeur :

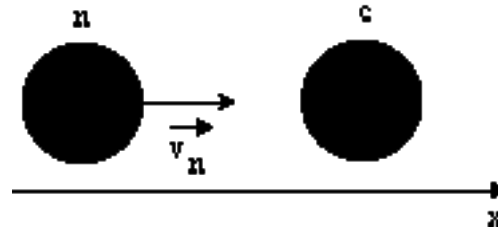
$$v_N' = 7,2 \text{ m.s}^{-1} \quad \text{et} \quad v_B' = 19,2 \text{ m.s}^{-1}$$



Exemple 14 Collision frontale entre neutrons et noyaux de carbone dans un réacteur nucléaire

Dans un réacteur nucléaire, on veut ralentir les neutrons émis en produisant des chocs avec des noyaux de carbone de masse m_c .

En supposant la collision élastique, étudions l'efficacité des collisions frontales, en calculant la perte d'énergie cinétique des neutrons.



La conservation de la quantité de mouvement entraîne que :

$$m_n \vec{v}_n + m_c \vec{v}_c = m_n \vec{v}'_n + m_c \vec{v}'_c$$

Si nous supposons le carbone immobile juste avant le choc, $\vec{v}_c = \vec{0}$, il reste :

$$m_n \vec{v}_n = m_n \vec{v}'_n + m_c \vec{v}'_c$$

En projetant sur l'axe x , on obtient la relation :

$$m_n v_n = m_n v'_n + m_c v'_c$$

ou encore :

$$m_c v'_c = m_n (v_n - v'_n)$$

et si l'on pose $\gamma = m_c / m_n$:

$$\gamma v'_c = v_n - v'_n$$

Comme la collision est supposée élastique, l'énergie cinétique se conserve également :

$$K_n = K'_n + K'_c$$

$$\frac{1}{2} m_n v_n^2 = \frac{1}{2} m_n v_n'^2 + \frac{1}{2} m_c v_c'^2$$

ou encore

$$m_c v_c'^2 = m_n (v_n^2 - v_n'^2)$$

On simplifie la résolution mathématique en divisant, membre à membre, $m_c v_c'^2$ par $m_c v_c'$, on obtient ainsi une seconde relation du premier degré :

$$v'_c = v_n + v'_n$$

Remarquons que cette équation aurait pu être déduite directement de (4.5) :

$$\frac{v'_n - v'_c}{v_n} = -1$$

Le système formé par les deux équations du premier degré obtenues est facile à résoudre :

$$\gamma v'_c = v_n - v'_n$$

$$v'_c = v_n + v'_n$$

En effet, en les additionnant d'une part, puis d'autre part en les soustrayant membre à membre, on obtient les vitesses immédiatement après le choc des noyaux de carbone et des neutrons :

$$v'_c = 2 \frac{v_n}{1+\gamma} \quad \text{et} \quad v'_n = v_n \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$$

Calculons la perte d'énergie cinétique relative du neutron :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{K_n - K'_n}{K_n} \\ &= \frac{(mv_n^2/2) - (mv_n'^2/2)}{mv_n^2/2} \\ &= \frac{1 - (v'_n/v_n)^2}{1} \\ &= 1 - \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^2 \\ &= \frac{4\gamma}{(1+\gamma)^2} \end{aligned}$$

Dans l'exemple du carbone considéré ici, γ vaut 12, d'où :

$$\varepsilon = \frac{4\gamma}{(1+\gamma)^2} = \frac{4 \cdot 12}{(1+12)^2} \cong 0,28.$$

La perte d'énergie cinétique relative du neutron ralenti par des noyaux de carbone ne vaut donc que 28 %. Si l'on veut obtenir la plus grande perte d'énergie cinétique relative pour les neutrons, celle qui correspond au ralentissement maximal (extremum de la fonction ε), il faut trouver la valeur de γ telle que la dérivée de ε par rapport γ soit nulle :

$$\frac{d\varepsilon}{d\gamma} = 4 \frac{(1+\gamma)^2 \cdot 1 - \gamma \cdot (1+\gamma) \cdot 2}{(1+\gamma)^4} = 0$$

Le numérateur $(1+\gamma)^2 \cdot 1 - \gamma \cdot (1+\gamma) \cdot 2$ s'annule pour $\gamma = \pm 1$. Comme γ est un rapport de masses, sa valeur doit être positive et nous ne retiendrons que la solution $\gamma = + 1$.

Dans ce cas, la perte d'énergie cinétique relative du neutron vaut :

$$\varepsilon = \frac{4\gamma}{(1+\gamma)^2} = \frac{4 \cdot 1}{(1+1)^2} = \frac{4}{2^2} = 1 = 100 \%$$



On comprend ainsi que pour ralentir les neutrons de façon efficace, on utilise des protons, ceux de l'eau par exemple, puisque $\gamma = \frac{m_p}{m_N} \cong 1$.

Vérifions dans le cas du choc élastique que nous venons de traiter que le coefficient de restitution vaut bien 1 :

$$\text{D'après (4.6) : } e = -\frac{v'_n - v'_c}{v_n},$$

$$\text{d'où : } e = -\frac{v_n \frac{1-\gamma}{1+\lambda} - 2v_n \frac{1}{1+\gamma}}{v_n} = -\frac{1-\gamma-2}{1+\gamma} = 1$$

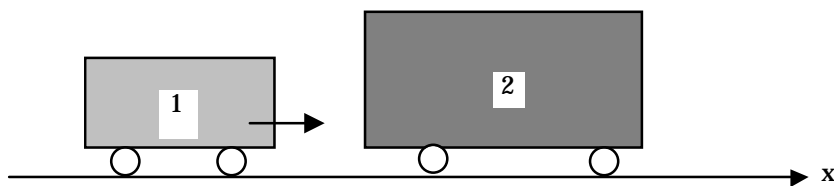
Remarque : Les résultats précédents peuvent être généralisés à deux billes 1 et 2 dans la situation où la bille 1 heurte de plein fouet la bille 2 qui est immobile :

$$v'_1 = v_1 \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \quad \text{et} \quad v'_2 = 2 \frac{v_1}{1+\gamma}$$

Il apparaît que : • Si les deux billes ont la même masse, $\gamma = 1$; la bille 1 s'arrête et la bille 2 part avec la vitesse de la bille 1. • Par contre, si $m_2 \gg m_1$, $\gamma \gg 1$; la bille 1 rebondit ($v'_1 = -v_1$) sur la bille 2 qui reste immobile.

Exemple 15 Choc mou entre une voiture et un camion (à une dimension)

Un camion (2) de 9 tonnes, immobile, est percuté par une voiture (1) d'une tonne qui arrive à la vitesse de $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Elle reste accrochée au camion et, après le choc, l'ensemble se déplace à la même vitesse v . Calculons sa valeur v .



Juste avant la collision, seule la voiture avait une quantité de mouvement non nulle. Lors de la collision, bien qu'il s'agisse d'un choc mou, comme la quantité de mouvement totale se conserve, on aura $\underline{p}_{\text{voiture}} = \underline{p}_{\text{ensemble}}$. Il en résulte que l'ensemble camion voiture se déplacera dans la même direction et le même sens que ceux de la voiture avant la collision et avec des quantités de mouvement de même valeur, $p_{\text{voiture}} = p_{\text{ensemble}}$.

On en déduit :

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v$$

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

$$v = \frac{10 \cdot 1000}{1000 + 9000} = 1 \text{ m.s}^{-1}$$

Contrairement à la quantité de mouvement totale, l'énergie cinétique totale ne se conserve évidemment pas lors d'un choc mou. Évaluons l'énergie dissipée :

$$\Delta K = K_{\text{avant la collision}} - K_{\text{après la collision}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2$$

L'expression littérale obtenue pour la vitesse de l'ensemble, $v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$, permet de mettre ΔK sous la forme suivante :

$$\Delta K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

et, finalement

$$\Delta K = \frac{1}{2} \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot \frac{9 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3} = 45 \text{ kJ}$$

C'est cette quantité d'énergie qui donne lieu aux "dégâts" (travail de déformation).

On pourrait se demander si elle dépend du repère choisi, et si, par exemple, elle a la même valeur que la voiture percute le camion ou que le camion heurte la voiture : Dans ce cas, on aurait $v_1 = 0$ et $v_2 = -10 \text{ m s}^{-1}$. On trouve une valeur différente pour la vitesse de l'ensemble dans ce nouveau repère :

$$v = v_2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} = -9 \text{ m.s}^{-1}$$

mais, bien entendu, ΔK reste inchangé.

Pour l'exemple de choc mou que nous venons de traiter, vérifiez que le coefficient de restitution e vaut bien 0.

Exemple 16 Rebondissement inélastique d'une balle sur le sol (à une dimension)

On lâche une balle d'une hauteur H de 1,6 mètres au-dessus du sol et l'on constate qu'elle rebondit seulement jusqu'à une hauteur h_1 de 0,9 mètre. Calculons le coefficient de restitution entre la balle et le sol et voyons quelle hauteur h_2 la balle atteindra après le bond suivant.

En négligeant les frottements avec l'air, la vitesse à laquelle la balle touche le sol vaut $v_{bi} = \sqrt{2gH}$ et, juste après le choc, elle rebondit à la vitesse $v_{bf} = \sqrt{2gh_1}$. Évidemment le sol n'a pratiquement pas bougé, il vient :



$$e = \frac{\sqrt{2gh_1}}{\sqrt{2gH}} = \sqrt{\frac{h_1}{H}} = \sqrt{\frac{0,9}{1,6}} = 0,75$$

Après le deuxième bond, $e = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$, d'où :

$$h_2 = h_1 e^2 = 0,9 \cdot 0,75^2 \cong 0,51 \text{ m.}$$

Exemple 17 Choc élastique d'une balle sur une paroi (à deux dimensions)

Une balle de 60 grammes frappe une paroi rigide sous un angle de 30° à la vitesse de $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. La durée du choc est de $0,01 \text{ s}$. On constate qu'elle rebondit sous le même angle et, dans l'hypothèse d'un choc élastique, calculons la valeur de la variation de la quantité de mouvement de la balle au cours du choc, puis la valeur \bar{F} de la force moyenne exercée par la sphère sur la paroi pendant la durée du choc.

Puisqu'on fait l'approximation que le choc est élastique, la valeur de la vitesse de la balle après le choc est identique à celle qu'elle avait avant.

D'après (3.1), la variation de quantité de mouvement de la balle vaut :

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$



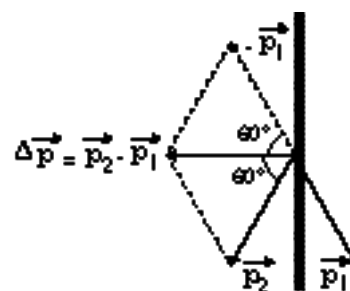
D'autre part, le calcul nous apprend que :

$$p_1 = m_1 v_1 = p_2 = m_2 v_2 = 60 \cdot 10^{-3} \cdot 10 = 0,6 \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Puisque $p_1 = p_2$, on est erronément tenté de conclure que $\Delta p = p_2 - p_1 = 0$ si on oublie que les quantités de mouvement sont des grandeurs vectorielles.

Pour apporter une réponse correcte, il faut d'abord chercher le vecteur $\Delta \vec{p}$ puis en calculer la valeur. Il est indispensable de s'aider d'un schéma.

Le vecteur $\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ est facile à construire : il suffit d'ajouter au vecteur \vec{p}_2 le vecteur $-\vec{p}_1$.



Le parallélogramme ainsi obtenu est formé de deux triangles équilatéraux accolés. On a donc :

$$\Delta p = p_2 = p_1 = 0,6 \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Comme l'impulsion $\vec{i} = \Delta \vec{p} = \langle \bar{F} \rangle \Delta t$, on peut considérer que tout se passe comme si le mur avait exercé une force moyenne sur la balle égale à :

$$\langle F \rangle = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{0,6}{0,01} = 60 \text{ N}$$

Exemple 18 Choc inélastique entre deux billes (à deux dimensions)

Deux billes A et B se déplaçant dans un plan se heurtent au point P. Elles sont respectivement de masses 2 kg et 3 kg. On connaît les vitesses, mesurées en m/s, juste avant le choc pour chacune des deux billes, et juste après le choc seulement pour la bille B :

$$\vec{v}_A = (4, -6), \quad \vec{v}_B = (2, 2) \quad \text{et} \quad \vec{v}'_B = (2, -2)$$

Pour calculer la valeur de la vitesse de la bille A juste après le choc, déterminons les composantes des quantités de mouvement des billes avant et après le choc :

$$\vec{p}_A = m_A \vec{v}_A = 2 (4, -6) = (8, -12)$$

$$\vec{p}_B = m_B \vec{v}_B = 3 (2, 2) = (6, 6)$$

$$\vec{p}'_B = m_B \vec{v}'_B = 3 (2, -2) = (6, -6)$$

Comme la quantité de mouvement se conserve vectoriellement, $\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}'_A + \vec{p}'_B$, on en déduit que :

$$\vec{p}'_A = (\vec{p}_A + \vec{p}_B) - \vec{p}'_B = (8 + 6 - 6, -12 + 6 + 6) = (8, 0)$$

d'où les composantes de la vitesse \vec{v}'_A de la bille A après le choc :

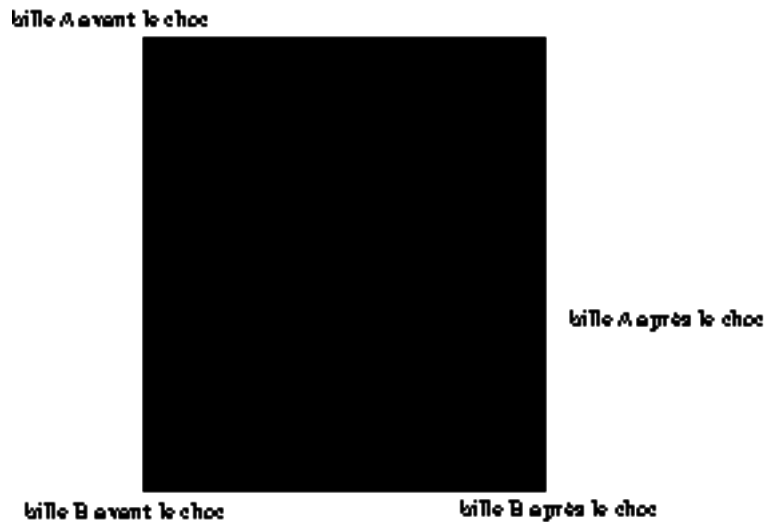
$$\vec{v}'_A = \frac{\vec{p}'_A}{m_A} = \frac{(8, 0)}{2} = (4, 0)$$

et la valeur de cette vitesse :

$$v'_A = \sqrt{(4)^2 + (0)^2} = 4 \text{ m/s}$$

Une vue stroboscopique des billes juste avant et juste après le choc, montre que la bille A a ralenti et changé de direction alors que B a seulement changé de direction.

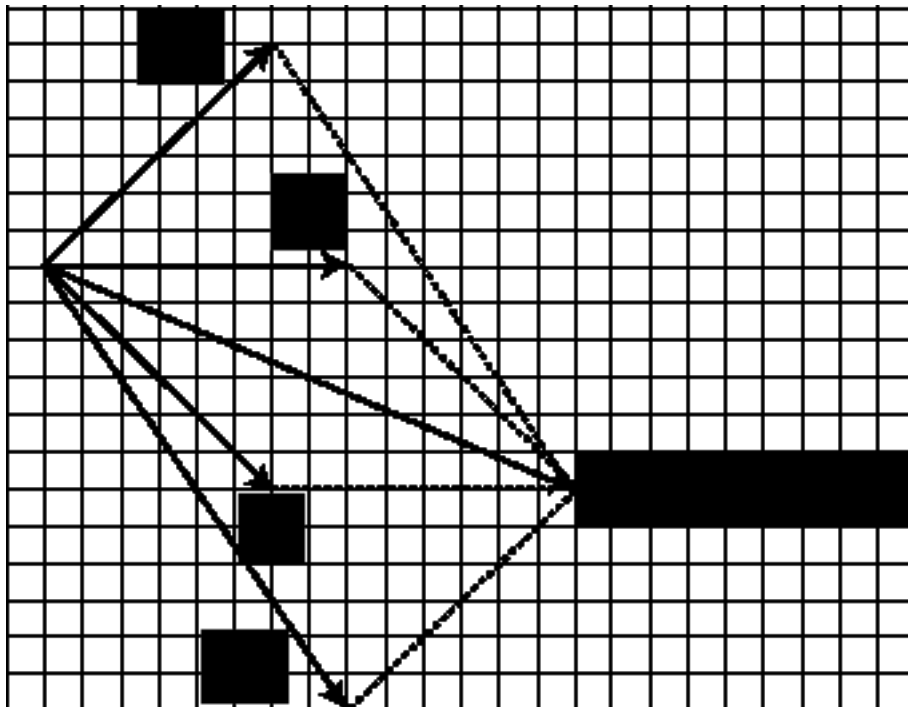




Vérifions graphiquement que l'on a bien $\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}'_A + \vec{p}'_B$.

Pour cela, représentons dans un système d'axes orthonormés les vecteurs \vec{p}_A et \vec{p}_B , \vec{p}'_A et \vec{p}'_B ainsi que leurs sommes respectives $\vec{p}_A + \vec{p}_B$ et $\vec{p}'_A + \vec{p}'_B$.

D'autre part, on constate sur la vue stroboscopique et sur le graphique suivant que la direction de la bille B a pivoté de 90° au moment du choc, ce qui ne nous étonne pas puisque le produit scalaire $\vec{p}_B \cdot \vec{p}'_B = (6, 6) \cdot (6, -6) = 36 - 36 = 0$.



Pour montrer que ce choc est inélastique, on compare la somme des énergies cinétiques de A et B avant le choc et après le choc :

avant le choc :

$$K = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \{(4)^2 + (-6)^2\} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \{(2)^2 + (2)^2\} = 64 \text{ J}$$

$$\text{après le choc : } K' = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (4)^2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \{(2)^2 + (-2)^2\} = 28 \text{ J}$$

L'énergie cinétique a diminué, le choc est donc inélastique et le coefficient de restitution a une valeur comprise entre 0 et 1. À titre d'exercice, vérifiez que $e \cong 0,27$.

Exemple 19 Explosion d'un rocher (à deux dimensions)

Un rocher initialement immobile se sépare en trois morceaux à la suite d'une explosion. Deux des morceaux s'éloignent à angle droit l'un de l'autre. Le premier de 0,5 kg part à la vitesse de 6 m.s⁻¹ et le deuxième de 1 kg à la vitesse de 5 m.s⁻¹. Sachant que le troisième morceau a une masse de 0,8 kg, déterminez avec quelle vitesse il se déplace. Cherchez ensuite l'angle formé par les trajectoires du deuxième morceau et du troisième morceau.

La conservation de la quantité de mouvement totale nous apprend que :

$$\vec{P}_{\text{avant l'explosion}} = \sum \vec{p}_{\text{après l'explosion}}$$

et par conséquent :

$$\vec{0} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$$

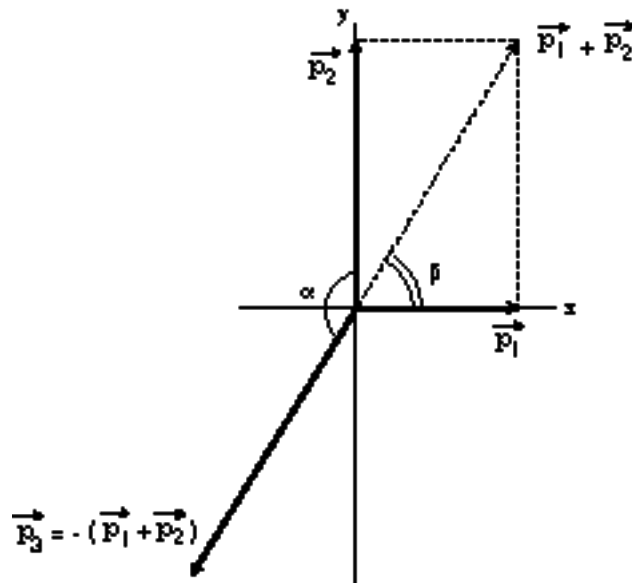
Calculons les quantités de mouvement respectives des premier et deuxième morceaux :

$$p_1 = m_1 v_1 = 0,5 \cdot 6 = 3 \text{ kg.m.s}^{-1}$$

$$p_2 = m_2 v_2 = 1 \cdot 5 = 5 \text{ kg.m.s}^{-1}$$

Résolvons cette fois l'exercice par la méthode graphique :





On utilise la règle du parallélogramme pour effectuer la somme vectorielle de \vec{p}_1 et \vec{p}_2 , représentés à la même échelle, puis on dessine le vecteur $\vec{p}_3 = -(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$ dans l'alignement du vecteur $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$, de même longueur et de sens opposé.

On voit sur la figure, qu'en appliquant le théorème de Pythagore, la valeur de p_3 est facile à déterminer :

$$p_3 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \text{ kg.m.s}^{-1}$$

d'où :

$$v_3 = \frac{p_3}{m_3} = \frac{\sqrt{34}}{0,8} \cong 7,3 \text{ m.s}^{-1}$$

Pour trouver l'angle α entre les trajectoires du deuxième et du troisième morceaux, calculons d'abord $\text{tg}\beta = \frac{p_2}{p_1} = \frac{5}{3}$, on peut en déduire que $\beta = \text{arctg } 5/3 \cong 59^\circ$, puis :

$$\alpha = \beta + 90^\circ \cong 59^\circ + 90^\circ = 149^\circ$$

À titre d'exercice, vérifiez qu'on obtient la même valeur pour p_3 en projetant $\vec{p}_3 = -(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$ respectivement sur les axes x et y .

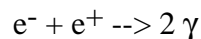
Exemple 20 Petscan

Le PET scan (Positron Emission Tomography scanner) est une technique employée en imagerie médicale pour contrôler l'activité métabolique d'organes actifs chez un patient. À titre d'exemples, elle permet de localiser certains défauts physiologiques même avant qu'ils n'aient causé des dommages irréversibles sur le plan anatomique, de localiser les lésions provoquant l'épilepsie, de différencier les tumeurs bénignes des tumeurs malignes. Cette technique est une des plus employées pour étudier l'état des artères coronaires et du muscle cardiaque ; mais elle permet aussi de confirmer ou d'infirmer certains tests dont les résultats sont douteux, de contrôler comment un patient réagit à un traitement, de mieux comprendre ce qui se passe dans le cerveau pendant que nous pensons, imaginons, visualisons, parlons...

Nous allons voir que le principe du PET scan est une conséquence directe de la conservation de la quantité de mouvement.

On injecte au patient une très faible quantité de produit radioactif β^+ de demi-vie courte, par exemple le ^{18}F Fluoro-desoxyglucose qui contient du ^{18}F de demi-vie égale à 110 min. Ce produit va se retrouver dans les organes à activité métabolique importante, comme le muscle cardiaque ou le centre de la parole du cerveau si le patient parle.

Tout produit radioactif β^+ émet des positons e^+ . Chaque positon émis rencontre aussitôt un électron e^- (il y en a partout) et leur annihilation donne naissance à 2 photons γ qui se déplacent à la vitesse de la lumière :



Ces photons γ ont une quantité de mouvement qui est reliée à leur longueur d'onde λ par la relation de De Broglie :

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

où h , la constante de Planck, vaut $6,62 \cdot 10^{-34}$ J.s.

À cause de la conservation de la quantité de mouvement, on a :

$$\vec{p}_{e^-} + \vec{p}_{e^+} = \vec{p}_{\gamma 1} + \vec{p}_{\gamma 2}$$

Mais, comme l'électron e^- et le positon e^+ ont une vitesse quasi nulle avant leur annihilation, on peut donc considérer que, avant le "choc" :

$$\vec{P} = \vec{p}_{e^-} + \vec{p}_{e^+} = \vec{0}$$

et donc :

$$\vec{p}_{\gamma 1} = -\vec{p}_{\gamma 2}$$

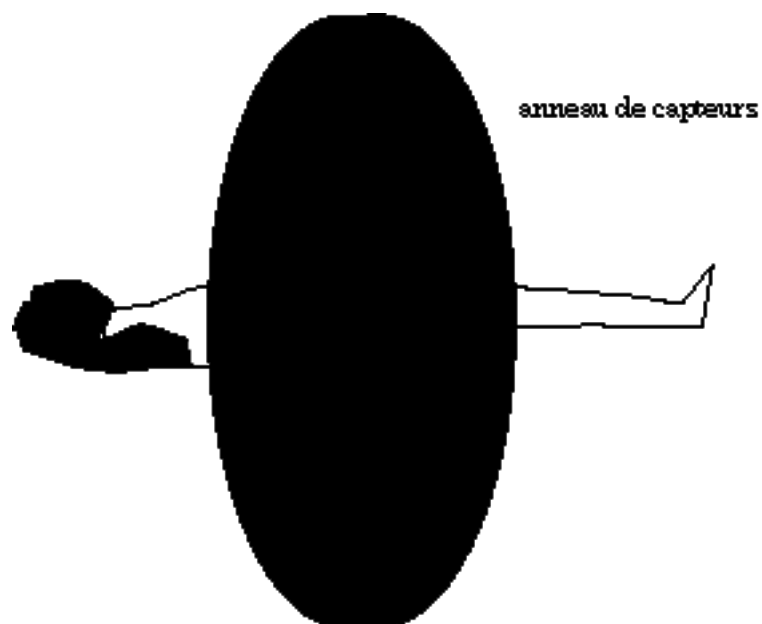
Toute l'énergie de l'électron et du positon, $2 m_e c^2$, est entièrement transformée en rayonnement électromagnétique $2 h f$. Les deux photons sont émis en ligne droite et ont chacun la même énergie donnée par :

$$E = m_e c^2 = h f$$

Cette énergie vaut environ 511 keV soit 10^{-13} J.

Les deux photons, émis lors d'une annihilation électron positon, se déplacent sur une même droite en sens opposés. Ils sont détectés (presque) simultanément par deux capteurs diamétralement opposés sur l'anneau à l'intérieur duquel se trouve le patient. Ceci permet de distinguer les paires de photons (le signal intéressant) des autres photons sans signification qui constituent ce qu'on a l'habitude d'appeler le bruit de fond et qui n'excitent pas deux détecteurs qui se font face.





Comme la quantité de mouvement avant l'annihilation n'était pas tout à fait nulle (le positon parcourt 4 mm environ avant d'être annihilé), les photons sont observés dans un cône de 1° d'ouverture et il est inutile d'avoir plus d'un capteur par degré.

Exercices complémentaires non résolus

(on négligera la résistance de l'air, sauf dans l'exercice 21)

1. La distance dans une molécule de CO entre l'atome de carbone, de masse atomique 12 u, et celui d'oxygène, de masse atomique 16 u, vaut 0,113 nanomètre. A quelle distance le C.M. de la molécule se trouve-t-il de l'atome de carbone ?

R : 0,065 nm

2. Le centre de masse d'une voiture de 800 kg, vide, se trouve à 1,50 m du point le plus à l'avant de la voiture. De combien reculera le C.M. si l'on place un colis de 50 kg dans le coffre à 2 m derrière le C.M. de la voiture vide ?

R : 0,12 m

3. Une boule de neige, de 0,05 kg, atteint à la vitesse de 20 m.s⁻¹ un enfant de 30 kg debout sur un étang verglacé (la composante de frottement de la force exercée par la glace sur l'enfant est très voisine de zéro). Quelle sera la valeur de la vitesse de recul de l'enfant ?

R : 0,033 m.s⁻¹

4. Un joueur de football dévie une balle d'un coup de pied très bref de durée Δt . La balle de masse m , arrive à la vitesse \vec{v}_1 et part à la vitesse \vec{v}_2 après le coup de pied. Les deux vitesses \vec{v}_1 et \vec{v}_2 ont la même valeur v et forment entre elles un angle de 90°. Déterminez, en fonction des données littérales, la valeur de la variation de la quantité de mouvement de la balle au cours du choc, puis celle de la force exercée par le joueur pour dévier la balle et supposée constante pendant la durée du choc Δt .

R : $\Delta p = m v \sqrt{2}$; $F = \frac{mv}{\Delta t} \sqrt{2}$

5. Une camionnette de 2 tonnes entre en collision frontale avec une voiture d'une tonne. Les deux véhicules circulaient à la même vitesse de 40 m.s⁻¹, mais en sens opposés. Après le choc, ils restent accrochés l'un à l'autre. Déterminez dans quel sens et à quelle vitesse le système camionnette-voiture se déplacera immédiatement après le choc.

R : même sens que la camionnette ; $v = 13,3$ m.s⁻¹



6. Un noyau d'uranium se désintègre suivant la relation $^{238}\text{U} \rightarrow ^{234}\text{Th} + ^4\text{He}$.

6.1. Dans une première expérience, le noyau d'uranium est initialement immobile. Après la désintégration, le noyau d'hélium ^4He a pour vitesse $\vec{v}_{\text{He}} = (1,4 \cdot 10^7; 0; 0)$ où les composantes de \vec{v}_{He} sont exprimées en m.s^{-1} . D'autre part, les noyaux de thorium et d'hélium s'éloignent l'un de l'autre suivant la même direction et dans des sens opposés (en fait, il s'agit d'un mouvement à une dimension). Ceci est-il dû au hasard ou est-ce toujours le cas lors d'une telle désintégration ? Quelles sont les composantes de la vitesse du noyau de thorium, ^{234}Th , issu de la même désintégration ?

6.2. Lors d'une deuxième expérience, le noyau d'uranium, ^{238}U , a une vitesse dont les composantes, données dans le S.I., sont $\vec{v}_{\text{U}} = (0; 150; 0)$. Quelles sont les composantes de la vitesse du centre de masse du système formé par les noyaux de thorium et d'hélium après la désintégration ?

R : non ; $\vec{v}_{\text{Th}} = (239.316; 0; 0)$; $\vec{v}_{\text{C.M}} = (0; 150; 0)$

7. On laisse tomber verticalement à la vitesse de 1 m.s^{-1} du sable sur un tapis roulant horizontal. Chaque mètre de tapis reçoit 200 kg de sable. Quelle est la valeur de la composante horizontale F_x de la force mécanique qu'il faut fournir pour faire avancer le tapis horizontalement à la vitesse de 2 m.s^{-1} ?

R : $F_x = \frac{dp_x}{dt} = v_x \frac{dm}{dt} = v_x \frac{dm}{dx} \frac{dx}{dt} = 2 \cdot 200 \cdot 2 = 800 \text{ N}$

8. Un pompier de 55 kg se trouve sur un sol horizontal à une distance de 7 m d'une maison en feu. L'eau quitte la lance d'arrosage dont l'extrémité est située à 1 m au-dessus du sol, à la vitesse de 26 m.s^{-1} , sous un angle de 60° avec l'horizontale et avec un débit de 5 litres par seconde. Pour résoudre le problème, nous supposons que la vitesse de l'eau dans le tuyau par rapport à la vitesse d'éjection ainsi que les frottements avec l'air sont négligeables.

8.1. A quelle hauteur z au-dessus du sol, le jet d'eau atteindra-t-il la maison ?

8.2. À cause de l'eau répandue sur le sol, le coefficient de frottement entre les chaussures du pompier et le sol vaut $0,07$. Le pompier restera-t-il immobile ?

R : $z \cong 11,7 \text{ m}$; non (car la force de frottement de $38,5 \text{ N} <$ composante horizontale de la force exercée par la lance $= 65 \text{ N}$)



9. Une balle de tennis de 60 grammes frappe le sol à la vitesse de 25 m.s^{-1} selon un angle de 40° par rapport à l'horizontale. Elle rebondit dans le même plan vertical à la vitesse de 20 m.s^{-1} selon un angle de 30° par rapport à l'horizontale.

9.1. Quelle est la perte d'énergie cinétique de la balle au cours du choc ?

9.2. Calculez la valeur de la variation de quantité de mouvement de la balle au cours du choc. En déduire, si la collision dure 5 ms, la valeur F de la force, \vec{F} , supposée constante, exercée par le sol sur la balle ?

R : $\Delta K = 6,75 \text{ J}$; $\Delta p \cong 1,6 \text{ kg.m.s}^{-1}$; $F \cong 314 \text{ N}$

10. Une pierre de 0,2 kg repose sur un plan horizontal bien poli. Une balle de fusil de 50 g heurte la pierre à la vitesse de 400 m.s^{-1} puis rebondit à angle droit à la vitesse de 300 m.s^{-1} .

10.1. Calculez les valeurs des quantités de mouvement de la balle, juste avant et juste après le choc, soient p_B et p'_B , et celle de la pierre p_P , juste avant le choc.

10.2. Représentez les vecteurs quantités de mouvement de la pierre et de la balle, juste avant et juste après le choc (échelle 1 cm pour 2 kg.m.s^{-1}) et déduisez du graphique, les valeurs prises immédiatement après le choc par la quantité de mouvement p'_P et la vitesse de la pierre v'_P ainsi que l'angle α entre les directions de la balle et de la pierre.

R : $p_B = 20 \text{ kg.m.s}^{-1}$; $p'_B = 15 \text{ kg.m.s}^{-1}$; $p_P = 0$;
 $p'_P = 25 \text{ kg.m.s}^{-1}$; $v'_P = 125 \text{ m.s}^{-1}$; $\alpha \cong 127^\circ$

11. À la livrée, un joueur de tennis lance une balle de 60 g en l'air et la frappe quand elle est retombée de 1,8 m. Le coup de raquette, dont la durée est estimée à 0,004 s, donne à la balle une vitesse dont la composante horizontale est de 24 m.s^{-1} et la composante verticale de 6 m.s^{-1}

Déterminez la valeur et la direction de la force moyenne exercée par la raquette sur la balle au cours de cette livrée.

R : $F \cong 402,5 \text{ N}$; angle entre l'horizontale et la direction de la force $\cong 26,6^\circ$

12. Une bille de 0,1 kg, lancée à la vitesse de 2 m.s^{-1} , cogne une bille immobile de 0,2 kg. Après le choc, la première bille se propage à la vitesse de 1 m.s^{-1} dans une direction faisant un angle de 60° par rapport à sa direction initiale.

Montrez, qu'avec les valeurs ci-dessus, le choc n'est pas élastique et que, juste après leur rencontre, les deux billes s'éloignent à angle droit.



R : la deuxième bille partira avec une vitesse de $0,866 \text{ m.s}^{-1}$

13. Deux patineurs A et B se déplacent sur la même trajectoire rectiligne. A de 40 kg a une vitesse de 4 m.s^{-1} et B de 60 kg a une vitesse de 2 m.s^{-1} . Calculez leur vitesse finale et la perte d'énergie cinétique du patineur A s'ils se heurtent et restent ensuite accrochés dans les deux situations suivantes :

13.1. Ils se déplaçaient dans le même sens et B est rejoint par A.

13.2. Ils se déplaçaient en sens opposés et se sont heurtés de front.

R : $2,8 \text{ m.s}^{-1}$; $\cong 163 \text{ J}$; $0,4 \text{ m.s}^{-1}$; $\cong 317 \text{ J}$

14. Montrez que, juste après un choc élastique entre deux billes de billard de mêmes masses et dont l'une est immobile, les vitesses des deux billes forment un angle droit.

15. Un noyau d'hélium lancé à la vitesse de $15\,000 \text{ km.s}^{-1}$ heurte un proton immobile. Sa trajectoire est déviée et sa vitesse réduite de $5\,000 \text{ km.s}^{-1}$. Si juste après le choc, les deux particules s'éloignent à angle droit, déterminez la valeur et la direction de la vitesse du proton.

R : $v \cong 44\,720 \text{ km.s}^{-1}$; angle entre la direction initiale du noyau d'hélium et celle du proton $\cong 41,8^\circ$

16. Un ballon de 200 g est envoyé sur un mur vertical, dans une direction faisant un angle de 30° avec le mur et le percute à la vitesse de 6 m.s^{-1} . À cause de l' " effet " donné au lancement, le ballon rebondit dans une direction perpendiculaire à sa direction incidente avec la vitesse de $3,2 \text{ m.s}^{-1}$. La durée du choc est évaluée à $0,05 \text{ s}$.

Caractériser la force moyenne exercée par le mur sur le ballon au cours du rebond puis calculez la variation d'énergie cinétique du ballon.

R : $27,2 \text{ N}$; angle entre le mur et la force exercée sur le ballon $\cong 58^\circ$; $-2,6 \text{ J}$

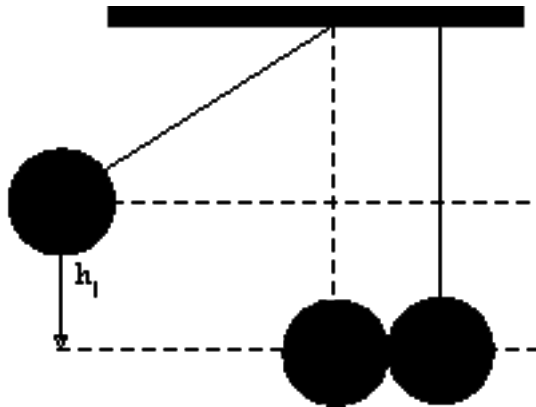
17. Une balle en fer de 10 grammes est tirée horizontalement à la vitesse de 600 m.s^{-1} . Elle vient s'incruster dans un bloc de bois de 5 kg libre de glisser sur un rail horizontal. On constate que le bloc, initialement immobile, recule de 10 cm . La chaleur thermique massique du fer vaut $448 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Calculez le coefficient de frottement entre le bloc et le rail ainsi que l'élévation de température de la balle en supposant qu'elle absorbe toute l'énergie cinétique perdue au cours du choc.



R : 0,72 ; 401°

18. Deux billes sont suspendues par des ficelles de manière à ce que leur point de contact soit sur la droite reliant les centres des billes. La bille de masse m_1 est soulevée, puis lâchée d'une hauteur h_1 . Elle vient alors cogner la bille de masse m_2 initialement immobile. On suppose le choc élastique.



Écrivez, en fonction des données, les expressions littérales des valeurs des vitesses des deux billes juste après le choc et des hauteurs atteintes par chacune des billes après le choc dans les trois situations suivantes $m_1 = m_2$, $m_1 = 3 m_2$ et $m_1 = \frac{1}{3} m_2$.

$$R : v'_1 = v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} ; v'_2 = v_1 \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} ;$$

$$h'_1 = 0, h'_2 = h_1 ; h'_1 = \frac{1}{4} h_1, h'_2 = \frac{9}{4} h_1 ; h'_1 = \frac{1}{4} h_1, h'_2 = \frac{1}{4} h_1$$

19. Une balle tombe en chute libre et rebondit sur une dalle horizontale d'abord jusqu'à 1,21 m de hauteur, puis à 0,64 m. De quelle hauteur H la balle a-t-elle été initialement lâchée ?

R : $H \cong 2,29$ m

20. Deux objets identiques de même masse m se déplaçant à la même vitesse v subissent une collision parfaitement inélastique. Ils adhèrent l'un à l'autre et l'ensemble repart avec une vitesse égale à $v/5$. Cherchez l'angle entre les directions initiales des deux objets.

R : 157°

21. Un parachutiste de 80 kg, sautant d'une hauteur d'environ 400 m, ne réussit pas à ouvrir son parachute et atteint une vitesse limite de 54 m.s⁻¹. Grâce au fait qu'il atterrit dans un creux de 1,2 m de profondeur rempli de neige, il ne subit qu'une fracture légère. En supposant la décélération constante pendant que le parachutiste s'enfonce dans la neige, évaluez la durée de l'immobilisation et la valeur de la force moyenne appliquée à ce moment au parachutiste.

R : 0,044 s ; 98 kN

22. Une cible de 400 g est placée en équilibre au sommet d'un poteau à 4 m du sol. On tire une balle de 20 g qui heurte la cible à $400 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ dans une direction inclinée à 45° par rapport au sol. Elle frappe la cible de plein fouet et la traverse de part en part sans subir de déviation. On constate que la cible tombe sur le sol à 4 m du poteau. Déterminez l'énergie cinétique perdue par la balle au cours du choc.

R : 631,5 J







