Claire BRANS

Myriam CORNET

Nicole COUSSAERT

Arlette DAMBREMEZ

Eveline FOREST

Liliane GUSMAN

Précis de Dynamique
Le mouvement de translation

U. L. B. - Atelier de physique

coordonné par G. GUSMAN

1995-1996

Les Cahiers du CeDoP

Préface

C'est avec joie que tous les membres de l'atelier se sont retrouvés cette année pour poursuivre leur travail. Après la cinématique, il aurait été dommage de ne pas aborder la dynamique, tout au moins dans une première partie consacrée aux mouvements de translation. De cette manière, nous mettons maintenant un texte assez complet sur la mécanique à la disposition des étudiants qui pourront l'utiliser comme notes de cours, car, bien sur, ces pages ne remplacent pas le cours donné par le professeur. Mais ce texte s'adresse aussi aux professeurs qui, nous l'espérons, y trouveront une aide.

Dans un but pédagogique, trois transparents en couleur complètent ce fascicule et peuvent être acquis séparément. Ils reprennent les principaux dessins et les équations correspondant aux problèmes traités. Le professeur pourra donc commenter les dessins projetés au cours et les élèves disposeront de tous les calculs détaillés qui les accompagnent.

Je remercie mes collègues professeurs de physique dans l'enseignement secondaire d'avoir mis leur expérience et leurs compétences au service de cet atelier qui, je le souhaite, se poursuivra l'an prochain.

Guy GUSMAN

Table des matières

1. Introduction

Après avoir décrit des mouvements[1], nous allons maintenant nous intéresser aux causes qui les produisent. Précisons dès maintenant que notre but est d'énoncer les règles qui régissent les mouvements, en insistant sur l'aspect universel de leur domaine d'application.

La dynamique, déjà introduite par Galilée, fut développée plus tard par Newton qui associa l'existence de forces à la modification de la vitesse d'un objet. La mécanique de Newton se fonde sur trois lois ou principes indissociables : la loi d'inertie, la loi fondamentale de la dynamique et la loi des actions réciproques.

Dans cette brochure, nous nous intéressons uniquement aux mouvements de points matériels, de particules, c'est-à-dire uniquement à des translations. Dans un prochain fascicule, nous pourrons étendre notre approche à des objets volumineux en cherchant à connaître le mouvement de translation de leur centre de masse. Provisoirement, le mouvement de rotation d'une balle sur elle-même, par exemple, ne sera pas étudié, et, en résumé, nous nous limiterons donc, à l'étude de la dynamique du point matériel.

[1]Précis de cinématique - Les Cahiers du CeDoP. ISBN 2-930089-15-6

2. Les lois de Newton

2.1. Le principe d'inertie

Imaginons un objet lancé sur un plan horizontal. On constate que cet objet parcourt une certaine distance et finit par s'arrêter. Mais, si l'on diminuait les frottements en mettant de l'huile sur ce plan, il parcourrait une plus grande distance. Continuons notre démarche en imaginant qu'il soit toujours lancé de la même façon, mais sur une patinoire horizontale si parfaite que les frottements y soient nuls : l'objet poursuivrait alors sa trajectoire indéfiniment à vitesse constante.

Prenons un deuxième exemple, celui d'un parachutiste. Il est soumis à deux forces de sens opposés. La première, son poids, est constante alors que la deuxième, la résistance de l'air, augmente avec sa vitesse. On devine facilement qu'il y aura un instant où la résultante de ces deux forces s'annulera ; à partir de cet instant, le parachutiste descendra à une vitesse constante qui est sa vitesse limite de chute dans l'air.

Tout ceci se retrouve dans la première loi de Newton qui nous dit :

Tout corps conserve son état de repos ou le mouvement rectiligne uniforme qu'il possède, à moins que quelque force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer cet état de repos ou son mouvement.

Cela signifie qu'en l'absence de toute force, la vitesse d'une particule ne varie pas, $\vec{v}(t) = \vec{cte}$. Bien entendu, le repos est un cas particulier d'une vitesse constante.

En fait, on pourrait s'étonner de l'énoncé de cette loi de Newton, en citant des exemples où un objet se mettrait apparemment spontanément en mouvement. Une valise déposée dans un autobus pourrait glisser sur le sol lorsque cet autobus prend un virage rapidement. Que se passe-t-il ? Une force est-elle apparue ? Non, simplement, la loi d'inertie n'est pas applicable dans le repère accroché à l'autobus parce que celui-ci est accéléré.

En fait, la première loi de Newton définit ce qu'est un référentiel inertiel, celui dans lequel nous allons travailler en utilisant les deux autres lois qui vont suivre. On pourrait donc dire :

Un référentiel inertiel est un référentiel dans lequel un corps qui n'est soumis à aucune force, ou à des forces dont la résultante est nulle, aura un mouvement rectiligne uniforme.

Cela revient à écrire, de façon mathématique, que dans un référentiel inertiel :

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \vec{0}$$

2.2. Le principe fondamental de la dynamique

La deuxième loi de Newton va maintenant nous apprendre ce qui se passe si un objet est soumis à une ou des forces dont la résultante n'est pas nulle. Newton prévoit que, dans ces conditions, sa vitesse changera et précise de quelle façon. Comme la vitesse est un vecteur, sa grandeur, sa direction et son sens peuvent être modifiés.

Dans un référentiel inertiel, l'accélération d'un point matériel est proportionnelle à la force qui lui est appliquée et inversement proportionnelle à sa masse.

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \Sigma \vec{F}$$

Une même force peut avoir des effets très différents selon la masse de l'objet sur lequel elle s'applique : par exemple, la même force exercée produira une accélération plus importante sur une balle de ping-pong que sur une balle de bowling. Nous sommes, d'autre part, tous d'accord pour dire qu'il faut exercer une force plus importante sur un train pour l'accélérer de la même façon qu'une voiture. On exprime cela, dans le langage courant, en disant que l'inertie du train est plus grande que celle de la voiture ou que la quantité de matière du train est supérieure à celle de la voiture : c'est ce que l'on appelle sa masse.

Remarquons que la masse d'un objet est une propriété de l'objet indépendante du lieu où il se trouve. C'est une grandeur scalaire qui traduit sa résistance aux variations de vitesse. On détermine sa valeur à partir des mesures simultanées de la force et de l'accélération qui en résulte. La masse d'un électron peut, par exemple, se déduire de la mesure de l'accélération résultant de forces connues dans un champ électrique ou magnétique.

Notons que la loi de Newton nous montre que l'accélération et la force (résultante) sont deux vecteurs qui ont même direction et même sens. Elle nous montre aussi que tous les référentiels en MRU par rapport à un référentiel inertiel sont aussi inertiels. Dans tous ces référentiels, les observateurs analyseront les mouvements à partir des mêmes forces. En revanche, si un observateur se trouve dans un référentiel accéléré, il ne pourra plus interpréter ce qu'il observe en employant les lois de Newton.

Nous habitons sur la Terre, qui tourne sur elle-même et autour du Soleil. Donc tout repère accroché à la Terre n'est pas au sens strict un référentiel inertiel. Cependant, pour de très nombreux problèmes, les murs d'une pièce, par exemple, constituent une excellente approximation d'un référentiel inertiel ; l'ingénieur qui construit une maison pourra en général oublier que la Terre tourne : la maison ne s'écroulera pas. Par contre, l'astronome qui étudie le déplacement d'une comète ou des satellites de Jupiter devra se montrer prudent. S'il rapportait leurs mouvements à la Terre supposée immobile, c'est-à-dire s'il utilisait les lois de Newton dans un repère accroché aux murs de sa coupole d'observation, il serait amené à en faire une analyse incorrecte. En effet, pendant la durée de ses observations, la rotation de la Terre sur elle-même, d'une part, et autour du Soleil, d'autre part, seraient la cause de mouvements apparents extrêmement curieux. Mais, comme il sait que la Terre est accélérée, prudemment, il va travailler dans un repère accroché à des « étoiles fixes ».

2.3. La loi des actions réciproques

Pour Newton, une force est toujours exercée par un corps sur un autre.

Prenons deux objets A et B et notons de façon conventionnelle, $\vec{F}_{A/B}$, la force exercée par A sur B, et, de même, $\vec{F}_{B/A}$, la force exercée par B sur A.

La troisième loi nous précise que

Les forces qu'exercent l'un sur l'autre deux points matériels sont de même direction, de même intensité, mais de sens opposés.

Ce que nous traduirons par l'expression mathématique :

$$\vec{F}_{A/B} = - \vec{F}_{B/A}$$

Attention, n'oublions pas que les deux forces ne s'appliquent pas au même corps ! Cette loi, comme la deuxième, n'est valable que dans un référentiel d'inertie. Lorsque le conducteur d'un autobus freine, un passager pourrait croire qu'une « force » le projette vers l'avant, mais il serait incapable de nommer l'objet qui l'aurait attiré ou poussé ; à cette force imaginaire ou pseudo-force ne correspond, en effet, aucune action réciproque comme l'exige la troisième loi. La difficulté provient du fait que son référentiel n'est pas inertiel puisqu'en mouvement accéléré. En revanche, un observateur inertiel extérieur qui regarde la scène peut expliquer ce qui se passe par les lois de Newton.

Une conséquence étonnante de cette troisième loi est que vous attirez autant la Terre que celle-ci vous attire. Mais lors d'une chute, l'accélération que la Terre nous communique est bien visible alors que celle que nous communiquons à la Terre est pratiquement nulle. Pourquoi ?

Exemple 1 La chute d'une pierre à la surface de la Terre

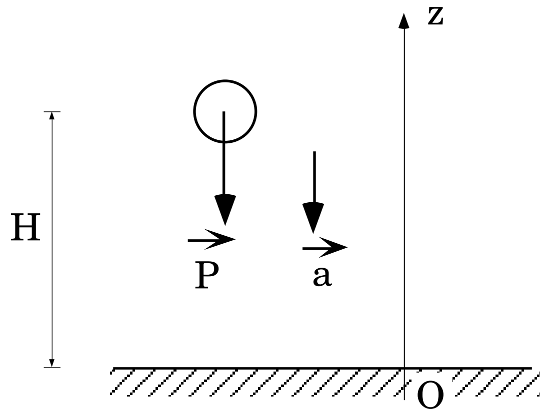
Quel est le mouvement d'une pierre, de masse m, qui est lâchée d'une hauteur H au-dessus du sol ? Si cette hauteur est suffisamment faible, nous pouvons négliger les frottements avec l'air, seule l'attraction de la Terre interviendra.

*

A partir de la deuxième loi de Newton, il faut chercher toutes les forces qui s'appliquent sur cet objet. Dans ce problème simple, il n'y en a qu'une : son poids $\vec{P}$, force exercée par la Terre sur la pierre, qui va lui communiquer une accélération $\vec{a}$. Dessinons la pierre, son poids et son accélération.

Dans un référentiel inertiel, nous écrirons :

$$\vec{P} = m\,\vec{a}$$



Le poids et l'accélération ont évidemment même direction et même sens, donc :

$$P = m\,a$$

Mais le poids à la surface de la Terre est donné par $P = G\,M_T\,m / R_T{}^2$ où R_T est le rayon de la Terre et M_T sa masse, ce que nous écrivons le plus souvent sous la forme

$$P = m\,(G\,M_T / R_T{}^2) = m\,g$$

On déduit que : $$m\,g = m\,a$$

Finalement : $a = g$

Ceci confirme ce que Galilée avait déjà observé : l'accélération de tous les objets tombant en chute libre au voisinage de la surface de la Terre vaut approximativement 10 m s^{-2} = 10 N kg^{-1}.

Si l'on veut décrire le mouvement de la pierre, il faut choisir un repère. La direction verticale s'impose dans ce problème et nous choisirons de diriger l'axe Oz verticalement, et, par exemple, vers le haut, alors que son origine est mise au niveau du sol.

$$\frac{dv_z}{dt} = -g$$

Nous sommes revenus à un problème de cinématique avec, comme conditions initiales : $v_z(0) = 0$ et $z(0) = H$

La vitesse de la pierre est $v_z(t) = -g\,t$ et sa position $z(t) = H - \frac{1}{2}\,g\,t^2$.

Supposons qu'au lieu de lâcher cette pierre, on la lance obliquement vers le haut, du même endroit et toujours en négligeant les frottements. Seules les conditions initiales changent et on est ramené à un problème semblable à celui du tir parabolique[2] .

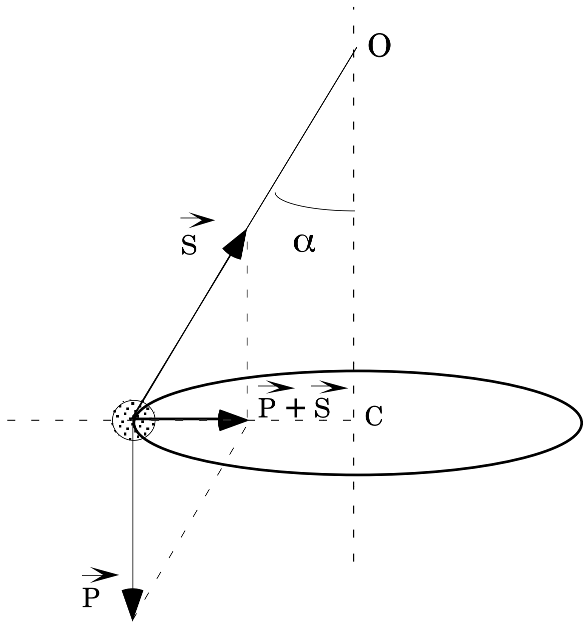
[2] Précis de cinématique - Les Cahiers du CeDoP. ISBN 2-930089-15-6

Exemple 2   Le pendule conique

Une bille, dont le poids P vaut 1,5 N, est suspendue à une ficelle, de masse négligeable et de longueur L = 50 cm, attachée à un point fixe O. On fait tourner la bille dans un plan horizontal selon un mouvement circulaire uniforme à la fréquence de rotation f. On constate que la ficelle fait un angle α de 30° avec la verticale. Que valent la vitesse v de la bille, sa période de révolution T ainsi que la tension S exercée par le fil sur la bille ?

*

Dessinons d'abord toutes les forces qui s'appliquent sur la bille, c'est-à-dire son poids $\vec{P}$, dont la valeur est m g et la tension $\vec{S}$, dont la valeur n'est pas encore connue mais dont la direction est celle du fil.



Comme la bille est en mouvement circulaire uniforme dans un plan horizontal, la résultante de ces forces est évidemment dans ce plan et, à tout instant, dirigée vers le point C, centre de la trajectoire. De plus, sa valeur est connue, elle vaut m ω^2 R, où R est le rayon de la circonférence décrite par la bille.

Ce qui donne : $|\vec{P} + \vec{S}| = m\,\omega^2 R$

D'autre part : $$\text{tg}\,\alpha = \frac{|\vec{P} + \vec{S}|}{|\vec{P}|} = m\,\omega^2 R / \; m\,g$$

Quant au rayon, R, il vaut : $R = L \sin\alpha$

De ces deux équations, nous obtenons la valeur de ω : $\omega^2 = \dfrac{g}{L \cos\alpha}$

et celle de v : $$v = \omega R = \sqrt{\frac{g}{L\cos\alpha}}\; L\sin\alpha = \sqrt{\frac{g\,L\sin^2\alpha}{\cos\alpha}} \qquad (1)$$

donc, celle de la période T : $$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\alpha}{g}} \qquad (2)$$

et la valeur de $\vec{S}$: $S = P / \cos\alpha$ (3)

Demandons-nous si ces réponses semblent plausibles ?

- Vérifions tout d'abord que les dimensions sont correctes.

- On devine que si la bille tourne de plus en plus vite, $f \to \infty$ (comme ω), le fil devient progressivement horizontal ($\alpha \to 90°$) et la tension $S \to \infty$ (le rayon maximal de la trajectoire est donc limité par la résistance du fil à la traction). Ceci apparaît-il à partir de nos résultats ?

Nous pouvons maintenant passer à l'application numérique :

$$v = \sqrt{\frac{10 \;\; 0{,}5 \;\; \sin^2 30°}{\cos 30°}} = 1{,}2 \text{ m s}^{-1}$$

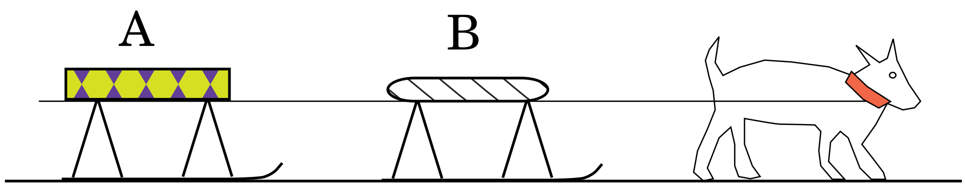
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}5 \cos 30°}{10}} = 1{,}3 \text{ s}$$

$$S = \frac{1{,}5}{\cos 30°} = 1{,}7 \text{ N}$$

Quelles seraient les nouvelles valeurs du rayon R et de l'angle α pour une tension S de 10 N ? ($R \cong 0{,}5$ m ; $\alpha \cong 81°$)

Exemple 3   Deux traîneaux tirés par un chien

Deux traîneaux A et B, de masses m_A = 48 kg et m_B = 32 kg, sont reliés par une corde. Initialement immobiles sur une piste enneigée et horizontale, ils peuvent y glisser avec des frottements très faibles que nous négligerons. On attelle cet ensemble à un chien qui exerce sur eux une traction horizontale constante de 120 N pendant 3 secondes, les tirant en ligne droite.



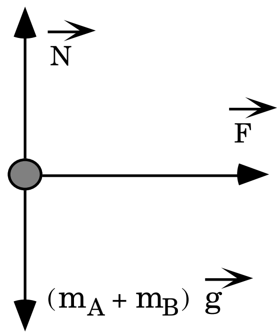
1. Quelle est la vitesse de l'attelage au bout de ces 3 secondes et quelle est la distance parcourue à cet instant ?

2. Que valent les forces résultantes appliquées à chacun des traîneaux pendant ces 3 secondes ?

3. Quelle est la tension, T, dans la corde qui relie les deux traîneaux ?

*

1. Comme on s'intéresse au mouvement de l'attelage, le système se comporte comme un seul objet, un solide indéformable, et l'on peut se contenter de chercher les forces (extérieures) qui s'y appliquent, comme on le voit sur le dessin ci-dessous.



Le système {A,B} est soumis à trois forces :
- le poids $(m_A + m_B)\ \vec{g}$, force verticale exercée par la Terre,
- la force $\vec{N}$ exercée par le sol, perpendiculaire au sol parce qu'il n'y a pas de frottement, donc verticale,
- la force de traction $\vec{F}$, horizontale, exercée par le chien.

Comme l'attelage se déplace horizontalement, la résultante de ces trois forces est forcément horizontale et donc $(m_A + m_B)\,\vec{g} + \vec{N} = \vec{0}$, il en résulte que la somme des forces se réduit à $\vec{F}$:

$$(m_A + m_B)\,\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} = \vec{F}$$

A partir de la deuxième loi de Newton, nous pouvons trouver l'accélération du système :

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_A + m_B}$$

qui a la direction horizontale et le sens de $\vec{F}$ et dont la valeur constante est :

$$a = \frac{F}{m_A + m_B}$$

Nous sommes ramenés à un problème simple de cinématique car il s'agit d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré. Choisissons d'orienter l'axe Ox horizontal dans le sens du mouvement et de placer l'origine au point de départ. En se rappelant que $v_0 = 0$ puisque l'attelage était initialement immobile, nous obtenons successivement, par intégration :

la vitesse $v(t) = a\,t$ et la position $x(t) = \frac{1}{2}\,a\,t^2$

En utilisant les données numériques, cela donne :

$$a = 1{,}5 \text{ m s}^{-2} ;\ v(3) = 1{,}5 \,.\, 3 = 4{,}5 \text{ m s}^{-1} \text{ et } x(3) = \frac{1}{2}\,1{,}5 \,.\, 3^2 = 6{,}75 \text{ m}$$

2. La force résultante, $m_A\,\vec{a}$, s'exerçant sur le traîneau A vaut donc

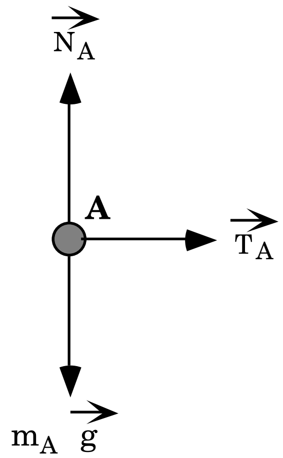
$$m_A\ a = 48.\ 1{,}5 = 72 \text{ N}$$

et celle, $m_B\,\vec{a}$, s'exerçant sur le traîneau B vaut, quant à elle

$$m_B\ a = 32.\ 1{,}5 = 48 \text{ N}$$

3. Le traîneau A subit 3 forces de résultante $\vec{T}_A$:

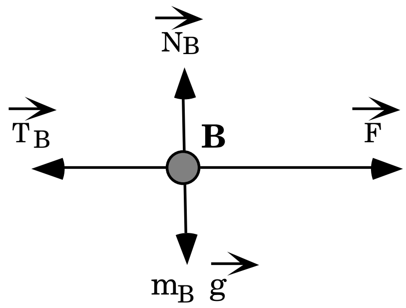
- le poids $m_A \ \vec{g}$, force verticale exercée par la Terre,
- la force $\vec{N}_A$ exercée par le sol, perpendiculaire au sol parce qu'il n'y a pas de frottement, donc verticale,
- la force $\vec{T}_A$, tension horizontale, exercée par la corde.



Le traîneau B subit lui 4 forces de résultante $\vec{F} + \vec{T}_B$:

- la force $\vec{F}$, traction horizontale exercée par le chien,
- le poids $m_B \ \vec{g}$, force verticale exercée par la Terre,
- la force $\vec{N}_B$ exercée par le sol, perpendiculaire au sol parce qu'il n'y a pas de frottement, donc verticale,

- la force $\vec{T}_B$, tension horizontale, exercée par la corde de sens opposé à la traction exercée par le chien, $\vec{F}$.



Les tensions $\vec{T}_A$ et $\vec{T}_B$ ont la même valeur T et comme les deux traîneaux ont la même accélération :

$$a = \frac{F}{m_A + m_B} = \frac{T}{m_A}$$

La tension vaut donc $T = F \dfrac{m_A}{m_A + m_B}$ et sa valeur numérique est de $T = 72$ N.

A titre de vérification, remarquons que l'accélération du traîneau B peut aussi s'obtenir à partir de $a = \dfrac{F - T}{m_B}$ (on retrouve bien 1,5 m s^{-2}) .

Posez-vous les questions suivantes :

1. Que vaudrait T si on inversait l'ordre des traîneaux ? (R : 48 N)

2. Quelle force le chien devrait-il exercer pour que le résultat soit le même si la piste avait une pente de 10% ? (R : 200 N)

3. Méthode générale de résolution d'un problème de dynamique

Jusqu'à présent, nous avons traité des problèmes relativement simples.

- Dans le premier exemple, il n'y avait qu'un seul corps. De plus, la pierre qui tombe n'est soumise qu'à une seule force, son poids.

- Le deuxième exemple ne comporte toujours qu'un seul corps, mais il y a deux forces qui s'appliquent sur l'objet. Néanmoins, une analyse simple du problème - basée sur la connaissance, a priori, du mouvement, c'est-à-dire du résultat : il s'agit d'un mouvement circulaire uniforme - nous permet une résolution en ne faisant intervenir que l'analyse vectorielle.

- Le troisième exemple se complique : il y a plus d'un corps et plus d'une force. En fait, c'est la question de la tension dans la corde reliant les deux traîneaux qui est la plus délicate car, pour y répondre, il faut bien comprendre et savoir appliquer la deuxième loi de Newton. Néanmoins, du fait que toutes les forces ont des directions privilégiées, horizontales ou verticales, une projection de vecteurs peut encore sembler superflue.

Mais on se rend compte que si la complication s'accroît encore, il faudra utiliser des moyens plus lourds mais qui, par leur généralité, permettront de résoudre les problèmes de façon systématique et parfaitement reproductible quant à la démarche logique à suivre. C'est ce que nous allons voir ci-après et illustrer par deux exemples.

Méthode de résolution :

1. Décomposer le système global étudié en ses parties individuelles. Le nombre de parties qui le compose est évidemment fonction des questions que l'on se pose.

2. Dessiner les forces qui s'appliquent sur chacune des parties élémentaires du système.

3. Choisir un repère (inertiel) simple pour le problème considéré.

4. Déterminer les contraintes cinétiques.

5. Ecrire les équations de Newton (vectorielles), puis les projeter dans le repère choisi pour obtenir des expressions algébriques. Il ne reste plus qu'à résoudre le système d'équations algébriques en accord avec les contraintes cinétiques. Avant tout calcul, il faut vérifier que l'on dispose d'un nombre d'équations (indépendantes) égal au nombre d'inconnues.

6. Il faut toujours résoudre le problème de façon littérale d'abord et arriver à « faire parler » chaque élément des expressions obtenues :

6.1. Regarder d'abord s'il n'y a pas d'erreur grossière en vérifiant les dimensions des réponses (ceci n'est plus possible dès que des valeurs numériques sont introduites).

6.2. Chercher s'il existe des situations limites du problème pour lesquelles la réponse est évidente et vérifier que ces réponses se déduisent bien des expressions générales obtenues.

6.3. Introduire finalement les données numériques, s'il y en a, et vérifier si les résultats sont plausibles.

Exemple 4   Le serveur de café

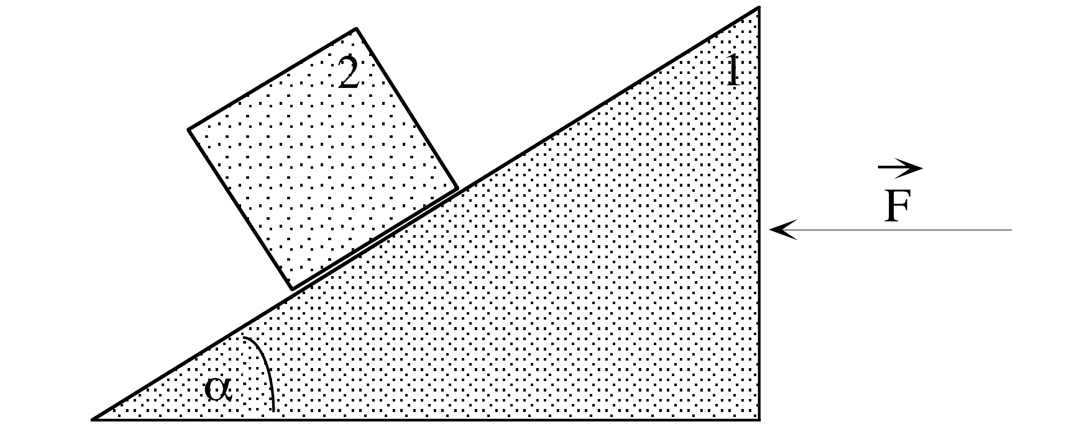
Un serveur de café apporte un verre sur un plateau. Le plateau est rendu très glissant par un verre qui a débordé. Que fait le serveur ? Pendant qu'il se déplace (sur le sol horizontal), il va incliner le plateau pour maintenir le verre immobile en exerçant, de la main, une force horizontale sur le plateau incliné. Nous allons approcher ce problème bien réel par le modèle suivant.

*

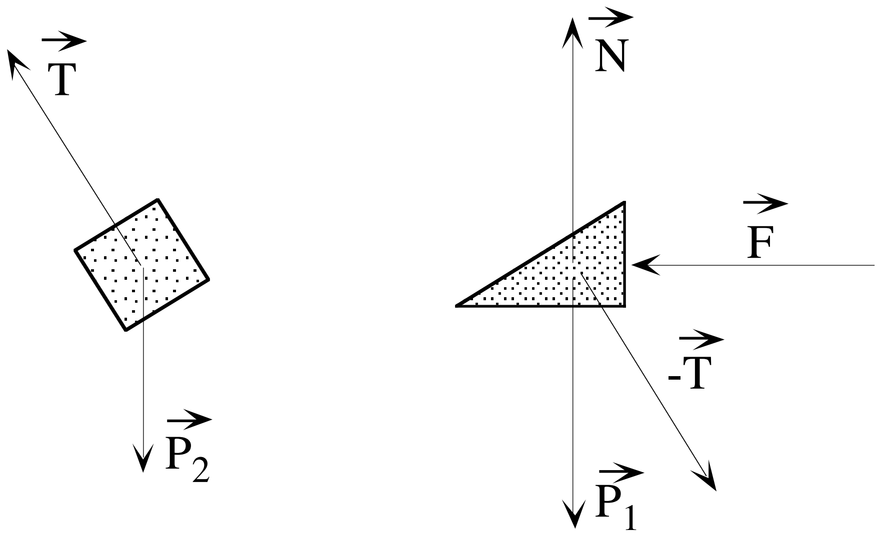
Un bloc est posé sur un coin triangulaire, lui-même placé sur une table horizontale et immobile. Toutes les surfaces peuvent glisser l'une sur l'autre sans frottement. Quelle est la force horizontale $\vec{F}$ qu'il faut exercer sur le coin 1 pour maintenir le bloc 2 immobile par rapport à 1 ?

Données numériques : $\alpha = 50°$, $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 5$ kg, $g = 10$ N kg^{-1}.

*

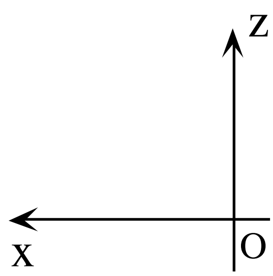


1. Faisons un schéma et dessinons toutes les forces qui s'appliquent sur chacun des deux objets (en mouvement).

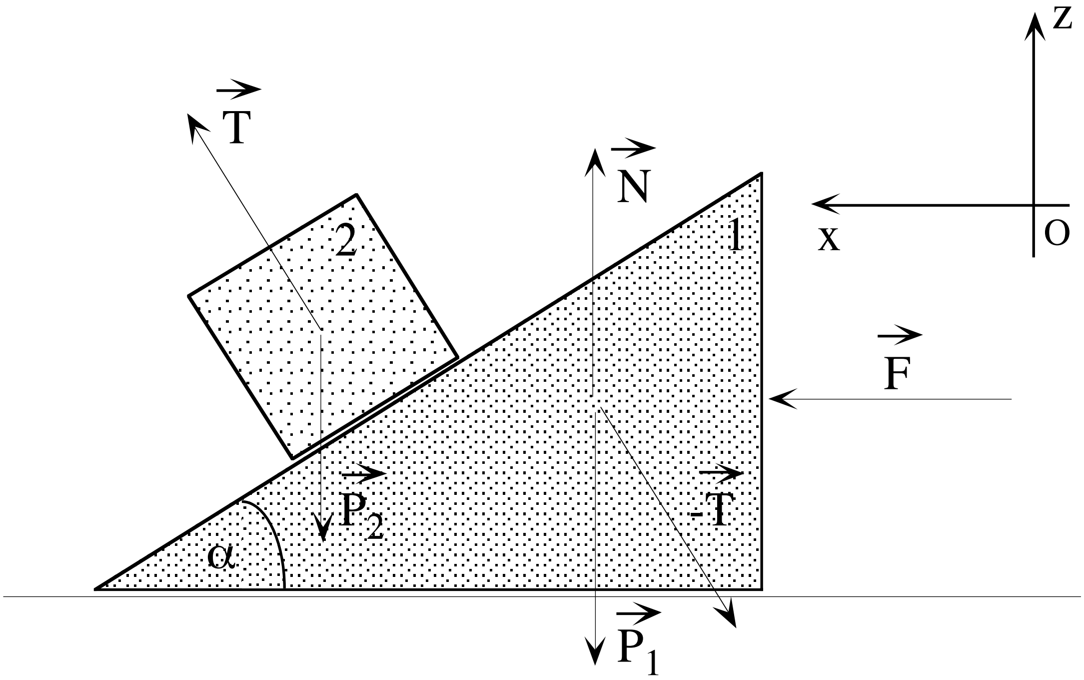


Nous avons appelé $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ les poids respectifs des objets 1 et 2, $\vec{N}$ la force exercée par la table sur le coin 1 et $\vec{T}$ la force exercée par 1 sur 2. Ces deux dernières forces sont normales aux surfaces à cause de l'absence de frottement. Finalement, nous avons utilisé la troisième loi de Newton pour chercher la force exercée par 2 sur 1 ; elle nous précise que cette force est égale à - $\vec{T}$. N'oublions pas la force horizontale $\vec{F}$ appliquée sur le coin 1.

2. Un repère naturel utilise les directions de certaines forces, afin d'en simplifier, plus tard, les projections. Nous avons choisi un axe x horizontal dans le sens de $\vec{F}$ et un axe z vertical dirigé vers le haut.



Un dessin complet résume le travail effectué jusqu'à présent :



Nous n'avons pas jugé nécessaire d'aligner sur ce dessin les actions réciproques $\vec{T}$ et $-\vec{T}$, puisqu'on ne s'intéresse ici qu'aux translations et que, dès lors, on considère 1 et 2 comme des « particules », leurs masses étant concentrées en leur centre de masse respectif.

3. Les contraintes cinétiques reviennent à écrire de façon mathématique, c'est-à-dire condensée, toute l'histoire racontée dans l'énoncé du problème.

3.1. « Les deux objets sont immobiles l'un par rapport à l'autre » signifie qu'ils ont la même accélération :

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2$$

3.2. « 1 glisse sur un plan horizontal » implique qu'il n'a pas d'accélération suivant Oz :

$$a_{1z} = a_{2z} = 0$$

3.3. et, finalement 3.1. et 3.2. nous conduisent à : $a_{1x} = a_{2x} = a$

Nous avons supprimé les indices, devenus inutiles, pour alléger l'écriture.

4. Les équations de Newton pour chacun des deux objets sont :

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{P_1} - \vec{T} = m_1\ \vec{a_1}$$

$$\vec{T} + \vec{P_2} = m_2\ \vec{a_2}$$

5. Projetons ces équations dans le repère Oxz :

Pour 1 : sur Oz --> $0 + N - m_1 g - T \cos\alpha = 0$ (a)

sur Ox --> $F - T \sin\alpha = m_1 a$ (b)

Pour 2 : sur Oz --> $T \cos\alpha - m_2 g = 0$ (c)

sur Ox --> $T \sin\alpha = m_2 a$ (d)

Nous vérifions que le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues. Ici, il y a 4 inconnues qui sont N, T, F et a, et 4 équations indépendantes. Le système peut être résolu.

6. Il ne reste qu'un petit problème de calcul. On obtient successivement :

(c)	$T = \dfrac{m_2\, g}{\cos\alpha}$	(1)
(c) + (a)	$N = (m_1 + m_2)\, g$	(2)
(c) / (d)	$a = g\ \mathrm{tg}\alpha$	(3)
(d) + (b) et (1)	$F = (m_1 + m_2)\, g\ \mathrm{tg}\alpha$	(4)

L'équation (1), par exemple nous montre que T, qui est la valeur d'une force, a bien les dimensions d'une masse fois une accélération, car un cosinus est un nombre sans dimension. On peut vérifier que les autres expressions sont également correctes du point de vue des dimensions.

Imaginons que le coin se réduise à une plaque horizontale, dans ce cas $\alpha = 0°$. Quelle serait la valeur de la force $\vec{F}$ à exercer pour maintenir le bloc 2 immobile sur 1 ? Nulle bien sûr ! Vérifions-le.

(4) nous dit que $$F = (m_1 + m_2)\, g\, \mathrm{tg}0° = 0$$

et, dans ce cas, l'ensemble n'est pas accéléré, comme nous l'apprend l'équation (3).

Que devient alors $\vec{T}$? C'est la force exercée par 1 sur 2 pour l'empêcher de s'enfoncer dans la table. Sa valeur est égale à celle du poids de 2. En effet,

(1) devient $$T = \frac{m_2\, g}{\cos 0°} = m_2\, g$$

Quant à la force exercée par la table, $\vec{N}$, pour soutenir à la fois 1 et 2, elle est bien égale à leur poids total comme nous le montre l'équation (2).

Que se passe-t-il si le coin devient de plus en plus incliné, $\alpha \rightarrow 90°$? On peut imaginer facilement que la force $\vec{F}$ devra être de plus en plus grande et qu'elle sera finalement infinie (on ne pourra plus immobiliser 2 par rapport à 1). Vérifiez-le.

Nous pouvons maintenant faire confiance à nos réponses littérales qui semblent décrire toutes les situations extrêmes. Introduisons **maintenant** les valeurs numériques ; nous obtenons :

$$T = 5 \,.\, 10 / \cos 50° = 77{,}8 \text{ N}$$

$$N = (1 + 5) \,.\, 10 = 60 \text{ N}$$

$$a = 10 \,.\, \mathrm{tg}\, 50° = 12 \text{ m s}^{-2}$$

$$F = (1 + 5) \,.\, 10 \,.\, \mathrm{tg}\, 50° = 71{,}5 \text{ N}$$

Exemple 5   Le remonte-pente

Un skieur de masse m (en tenant compte de son équipement) utilise un remonte-pente pour rejoindre le haut de la piste. Il est tracté à une vitesse constante $\vec{v}$ au long d'une pente qui fait un angle β avec la verticale. L'angle entre le câble et la pente vaut α. Quelle est la force de traction $\vec{T}$ qui s'exerce sur le skieur ? Le coefficient de frottement entre les skis et la neige est μ_c.

Données numériques : $\alpha = 30°$, $\beta = 78°$, $m = 80$ kg, $\mu_c = 0{,}1$ et $g = 10$ m s^{-2}

*

Nous pouvons maintenant aller plus vite.

1. Le système ne se compose que d'un élément : le skieur.

Il est soumis à trois forces : son poids $\vec{P}$, la force de traction $\vec{T}$ et la force $\vec{S}$ exercée par la piste, qui n'est plus normale à cette piste car il y a une composante de frottement.

2. Un choix naturel de repère inertiel est Oxy où Ox est parallèle à la piste et dirigé vers le sommet, Oy est perpendiculaire et dirigé vers le haut.

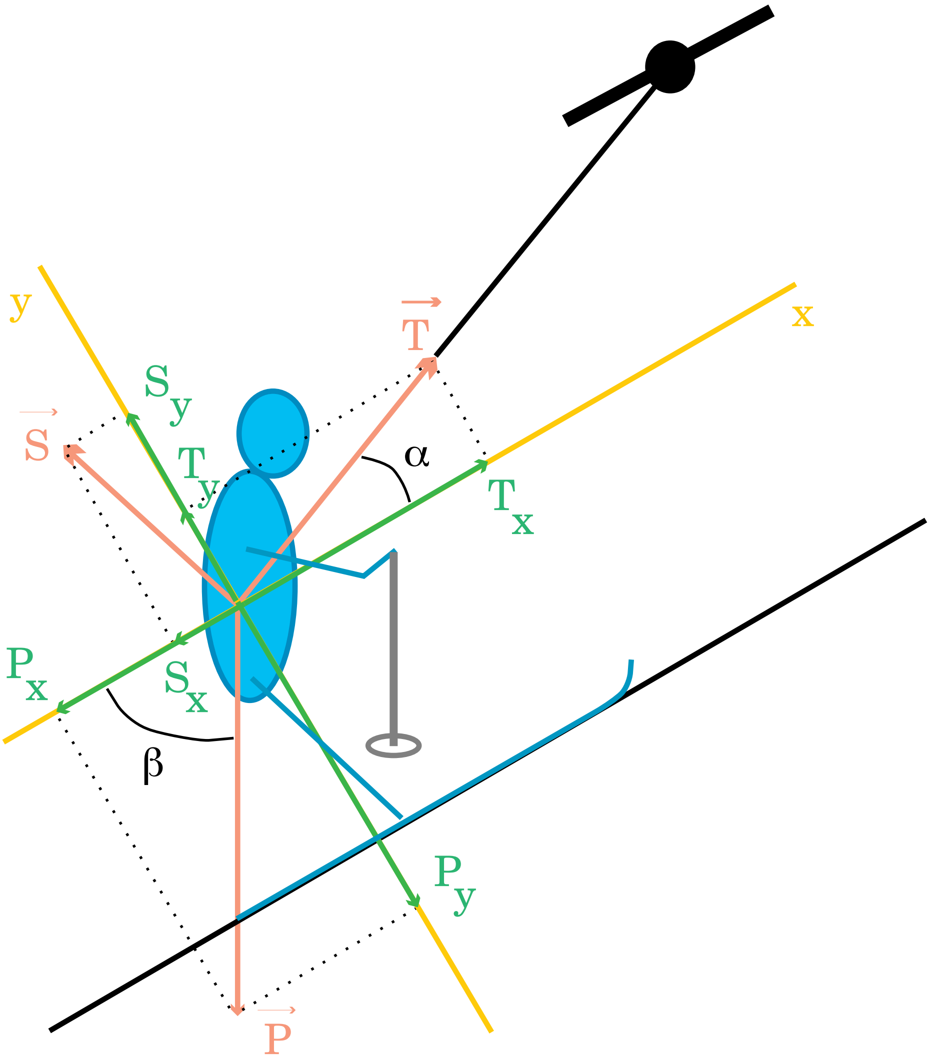
Dans ce repère, $\vec{S}$ se décompose suivant : $\vec{S} = S_x \vec{1_x} + S_y \vec{1_y}$
où $S_y = N$, la valeur de la composante normale à la trajectoire
et $S_x = F_f$, correspond à la composante de frottement, tangente à la trajectoire.

Comme dans ce problème, il s'agit de frottements entre solides, $\vec{F_f} = \mu_c \vec{N}$.

3. Il glisse le long de la piste, donc la composante suivant y de son accélération est nulle. De plus, comme la vitesse $\vec{v}$ est constante, la première loi de Newton nous rappelle que la somme des forces est nulle.

4. Ecrivons l'équation de Newton :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{S} = \vec{0}$$



5. Projetons cette équation dans le repère Oxy :

sur Ox --> $- mg \cos\beta + T \cos\alpha - \mu_c N = 0$ (a)

sur Oy --> $- mg \sin\beta + T \sin\alpha + N = 0$ (b)

Le nombre d'équations indépendantes est bien égal au nombre d'inconnues, ici 2, qui sont N et T. Le système peut être résolu.

6. On obtient :

$$T = mg \, \frac{\mu_c \sin\beta + \cos\beta}{\mu_c \sin\alpha + \cos\alpha} \qquad (1)$$

et

$$N = mg \, \frac{\sin\beta - \mathrm{tg}\alpha \cos\beta}{1 + \mu_c \,\mathrm{tg}\alpha} \qquad (2)$$

Vérifiez que les deux expressions sont correctes du point de vue des dimensions, puis posez-vous quelques questions :

- Supposons la piste horizontale et les frottements négligeables, dans ce cas $\beta = 90°$ et $\mu_c \to 0$. Quelles seraient les valeurs de $\vec{T}$ et de $\vec{N}$?

T serait bien sûr nul et N égal à mg. Vérifiez-le.

- Comment évolue T si la piste devient progressivement verticale, c'est-à-dire si α et $\beta \to 0°$? Le skieur finit par être suspendu au câble et la piste n'intervient plus. On en déduit que T doit être égal au poids mg. Vérifiez-le.

- Si $\alpha = \beta$, (1) montre que T = mg, comprenez-vous ce que cela traduit ?

Nous pouvons une fois de plus faire confiance à nos réponses littérales qui semblent décrire les situations extrêmes envisagées. Introduisons **maintenant** les valeurs numériques dans (1) puis (2) ; nous obtenons :

$$T \cong 270 \text{ N} \qquad \text{et} \qquad N \cong 650 \text{ N}$$

Remarquons que ce problème a été résolu en utilisant uniquement la première loi de Newton. En effet, on aurait pu choisir un repère animé de la vitesse $\vec{v}$ du skieur puisque celle-ci est constante. Dans ce nouveau repère, le skieur aurait été immobile et on aurait eu affaire à un problème de statique.

Exercices complémentaires non résolus

1. Un ascenseur de 300 kg fonctionne dans un bâtiment comportant 20 étages, de 3,2 mètres chacun. Lors de la montée de l'ascenseur, du rez-de-chaussée au vingtième étage, l'accélération de l'ascenseur est tout d'abord constante, a = 0,8 m s^{-2}, au cours des dix premiers mètres, puis son mouvement est uniforme jusqu'au dix-huitième étage et, enfin, uniformément retardé jusqu'à l'arrêt.

1.1. Calculez, si on évalue les frottements à 150 N, la force motrice nécessaire pour chaque partie de cette ascension et la durée de celle-ci.

1.2. Si une étudiante de 50 kg se tenait debout dans cet ascenseur sur un pèse-personne, verrait-elle la lecture de son "poids apparent" varier ? Plus précisément, serait-il inférieur, égal ou supérieur à son poids réel pendant la première partie de l'ascension ?

1.3. En est-il de même pendant la deuxième partie ?

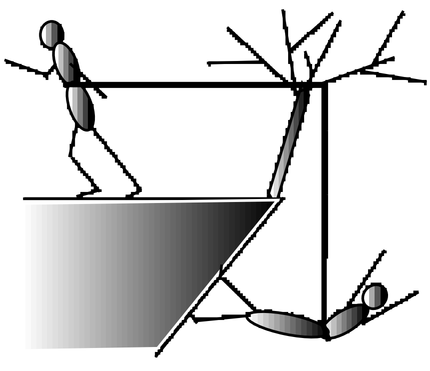
R : 1.1. 3 390 N   3 150 N   2 775 N   20,1 s

1.2. oui, il est supérieur à son poids réel

1.3. non, il est égal à son poids réel

*

2. Deux amis, Paul, de masse 50 kg, et Alexandre, de masse 70 kg, sont encordés à l'aide d'un câble de masse négligeable. Paul est debout sur une surface horizontale verglacée au moment où, accidentellement, Alexandre glisse du rocher.

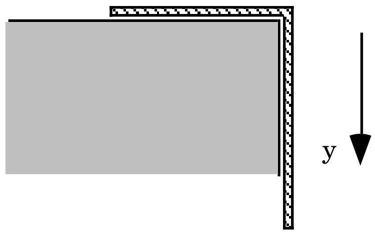


En supposant les deux parties de corde, respectivement horizontale et verticale, et les frottements sur l'arbre négligeables, déterminez la tension dans la corde et l'accélération des deux amis.

R : 290 N   5,8 m s^{-2}

*

3. Une chaînette flexible de longueur totale L peut glisser sur l'arête d'une tablette horizontale très lisse, on peut donc négliger les frottements. Au moment où on libère la chaînette, seule une longueur Y de cette dernière pend verticalement à partir de l'arête.



Montrez que l'accélération de la chaînette en fonction de y vaut $\frac{g\,y}{L}$.

Maintenant que vous avez obtenu l'accélération qui dépend de y, écrivez l'équation de Newton. Vous obtenez une équation différentielle reliant la dérivée seconde de y par rapport au temps à la fonction y elle-même. La solution de cette équation est une fonction que vous connaissez bien. Laquelle ?

Si vous la trouvez, montrez qu'au moment où la chaînette devient complètement verticale, sa vitesse v est égale à $\sqrt{g\,(L - \frac{Y^2}{L})}$.

*

4. Un camp est installé en montagne sur une pente de 30°. On demande à un des campeurs d'essayer de remonter un sac de 200 kg. Il va exercer sur ce dernier une force constante, parallèle au plan incliné, de 200 N. En supposant les forces de frottements égales à 170 N, trouvez l'accélération du sac. Le campeur réussira-t-il à remonter le sac ?

R : $|a| = 3$ m s^{-2}, le campeur ne peut que freiner le sac qui descendra la pente !

*

5. Deux blocs identiques, de 10 kg chacun, sont utilisés sur une surface verglacée. Le premier A est maintenu au repos sur un pente inclinée à 20° par rapport à l'horizontale, à 10 m du second B qui se trouve au pied de la pente. Lorsqu'on lâche A, il glisse et adhère à B au moment de la rencontre. Ensemble, ils poursuivent leur mouvement horizontalement, quelle est alors leur vitesse commune ?

R : Volontairement non donnée, soyez plusieurs à résoudre l'exercice et comparez vos réponses. Discutez entre vous si vos réponses sont discordantes.