

Chapitre 2

Intégration des fonctions d'une variable complexe

“Les hommes meurent, mais leurs travaux restent.”
(dernières paroles de Augustin-Louis Cauchy, 1789–1857)

Après avoir montré comment la dérivation se généralise à \mathbb{C} , il s'agit ici de présenter quelques résultats fondamentaux sur l'intégration des fonctions d'une variable complexe.

2.1 Préliminaires

La notion d'intégrale de Riemann d'une fonction à valeurs réelles sur un domaine $I \subset \mathbb{R}$ de sa variable est supposée connue. Très schématiquement, pour une fonction $f(x)$ continue¹ dans l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, on définit une grille de points d'abscisses x_n dans l'intervalle $[a, b]$ ($x_0 = a$, $x_N = b$) et on considère les sommes du genre (dites *sommes de Darboux*) :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} f(\xi_n)(x_{n+1} - x_n) , \quad (2.1)$$

où $x_n \leq \xi_n \leq x_{n+1}$. Si la limite de S_N existe quand $N \rightarrow \infty$ et que $\sup |x_{n+1} - x_n|$ tend vers zéro, cette limite est appelée l'intégrale de f sur le segment $[a, b]$. Dans la notation usuelle, on écrit :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\sup |x_{n+1} - x_n| \rightarrow 0} S_N = \int_a^b f(x) dx . \quad (2.2)$$

Le symbole dx désigne une variation infiniment petite de la variable x autour d'une valeur x parcourant l'intervalle $[a, b]$. Dans ce cas, et de façon un peu pédante, on peut dire que le segment de droite d'extrémités a et b est un *chemin* allant de a à b .

C'est cette définition qu'il s'agit de généraliser au cas d'une fonction à valeurs complexes $f(z)$, z étant lui-même un complexe. La première notion à préciser est le chemin suivi dans le plan pour aller d'une borne à l'autre de l'intégrale, c'est-à-dire d'un point A à un point B du plan, d'affixes respectives z_A et z_B . Dans toute la suite, on ne considérera que des chemins parcourus dans un certain sens (orientés) et constitués d'arcs de courbe une fois continûment différentiables. Un tel chemin C d'extrémités A et B fixées étant précisé, on le tronçonne en petits arcs délimités par des complexes z_n , $0 \leq n \leq N$ ($z_0 = z_A$, $z_N = z_B$) et on écrit la somme :

$$\mathcal{S}_N = \sum_{n=0}^{N-1} f(\xi_n)(z_{n+1} - z_n) , \quad (2.3)$$

¹La généralisation à une fonction continue *par morceaux* est immédiate.

où ξ_n est l'affixe d'un point situé sur C et appartenant au petit arc de courbe délimité par les points d'affixes z_n et z_{n+1} . On définit alors l'intégrale le long de C comme la limite :

$$\int_C f(z) dz = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\sup |z_{n+1} - z_n| \rightarrow 0} S_N . \tag{2.4}$$

dz désigne une variation infinitésimale du nombre complexe z autour de la valeur z (associé à un arc de chemin infiniment petit – que l'on peut noter dC – dont les affixes sont z et $z + dz$) ; ce sont tous les petits arcs dC qui, mis bout à bout, reconstituent le chemin C . La limite (2.4) existe si f est une fonction bornée continue². En posant $f = u + iv$, $z = x + iy$ (et donc $dz = dx + idy$), on a :

$$\int_C f(z) dz = \int_C [u(x, y) + iv(x, y)](dx + idy) = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (u dy + v dx) \tag{2.5}$$

Ainsi, l'intégrale d'une fonction complexe peut toujours s'exprimer à l'aide des deux intégrales réelles ci-dessus. De telles intégrales sont dites *curvilignes*, puisque les variables x et y peuvent toujours être interprétées comme les coordonnées cartésiennes d'un point M se déplaçant sur la courbe C .

Précisons la signification d'une intégrale curviligne. La courbe C a une équation cartésienne $\Phi(x, y) = 0$, mais il est toujours possible en principe d'en trouver une représentation paramétrique $(x(t), y(t))$ où³ t est réel : quand t varie, le point d'affixe $z(t) = x(t) + iy(t)$ décrit la courbe C du point A (quand $t = t_A$) au point B (quand $t = t_B$). Dans toute la suite, les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ seront supposées à dérivées continues, éventuellement par morceaux.

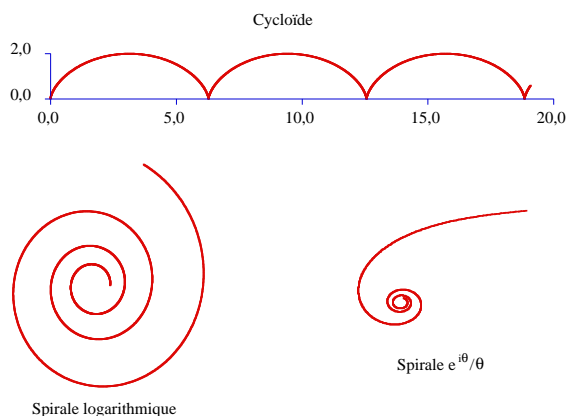


Figure 2.1: Exemples de courbes données sous forme paramétrique. La spirale logarithmique est $x = e^{a\theta} \cos \theta$, $y = e^{a\theta} \sin \theta$: c'est le lieu de l'affixe de $e^{(a+i)\theta}$; la spirale en bas à droite est l'affixe de $\frac{e^{i\theta}}{\theta}$.

Par exemple, la droite du plan d'équation $y = a(x - x_0) + y_0$ admet la représentation paramétrique⁴ $x = x_0 + t$, $y = at + y_0$, les points de cette droite ayant les affixes $z(t) = x_0 + t + i(at + y_0) = x_0 + iy_0 + (1 + ia)t$. De même, le cercle centré en $z_0 = x_0 + iy_0$ et de rayon R est l'ensemble des points de coordonnées $x = x_0 + R \cos t$, $y = y_0 + R \sin t$, et l'affixe de chacun de ces points est le complexe $z(t) = z_0 + Re^{it}$. Avec cette représentation, t a une signification très simple : c'est l'angle polaire du rayon joignant le centre du cercle au point de coordonnées $x(t), y(t)$. Autre exemple : la courbe décrite par une mouche accrochée à une roue de bicyclette de rayon R qui roule sans glisser (cycloïde) a pour représentation paramétrique $x(t) = R(t - \sin t)$, $y(t) = R(1 - \cos t)$, si la mouche est "au départ" ($t = 0$) à l'origine. t désigne alors l'angle entre la verticale passant par le centre

²Ceci reste vrai quand f est bornée et continue *par morceaux*.

³ t est un nombre sans dimension, ce n'est pas le temps (lequel d'ailleurs ?) !

⁴C'est manifestement la représentation la plus simple, mais il en existe autant qu'on veut : on peut prendre $x = f(t) + x_0$ où f est une fonction uniforme croissante appliquant \mathbb{R} sur \mathbb{R} , et alors $y = af(t) + y_0$. La représentation paramétrique d'une courbe dépend évidemment du choix de l'origine dans le plan.

de la roue et le point où est agrippée la mouche endormie. L'affixe d'un point courant de la cycloïde est $z(t) = R(t + i) - iRe^{-it}$.

Dès que l'on connaît une représentation paramétrique de C , une intégrale curviligne s'écrit aisément. Par exemple, en utilisant $dx = x'(t)dt$ et $dy = y'(t)dt$, la première intégrale de (2.5) s'écrit :

$$\int_C (u dx - v dy) = \int_{t_A}^{t_B} \{u[x(t), y(t)] x'(t) - v[x(t), y(t)] y'(t)\} dt \equiv \int_{t_A}^{t_B} \gamma(t) dt, \quad (2.6)$$

où $\gamma(t)$ est une certaine fonction de t , bien déterminée ; il en va de même pour $\int_C (u dy + v dx)$. Au total, posant $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$, d'où $dz = [x'(t) + iy'(t)]dt$, il vient :

$$\int_C f(z) dz = \int_{t_A}^{t_B} f[z(t)] z'(t) dt \equiv \int_{t_A}^{t_B} \Gamma(t) dt, \quad (2.7)$$

où $\Gamma(t)$ est encore une autre fonction. En résumé, l'intégrale d'une fonction complexe sur sa variable complexe peut s'écrire des différentes façons :

$$\int_C f(z) dz = \int_C [u(x, y) + iv(x, y)](dx + idy) = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (u dy + v dx) = \int_{t_A}^{t_B} f[z(t)] z'(t) dt \quad (2.8)$$

La courbe C étant choisie, le calcul complet est en principe possible, en tout cas l'intégrale $\int_C f(z) dz$ est définie sans ambiguïté.

Un contour qui ne se recoupe pas lui-même (pas de boucle) est appelé *arc de Jordan* ; en pareil cas, la fonction $z(t)$ est biunivoque : $t_1 \neq t_2 \iff z(t_1) \neq z(t_2)$. La longueur dL d'un arc élémentaire est égale au module de la variation infinitésimale de z soit $dL = |dz|$; une fois choisie une représentation paramétrique, on peut ainsi écrire $dL = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} |dt| = |z'(t) dt|$. Pour un arc dont les extrémités sont définies par $t = \alpha$ et $t = \beta$ ($\alpha < \beta$), la longueur de l'arc est L :

$$L = \int_C |dz| = \int_{\alpha}^{\beta} |z'(t) dt| \quad (2.9)$$

Pour finir, montrons que, avec les hypothèses admises, l'intégrale $\int_C f(z) dz$ existe. En effet, f étant bornée⁵, et comme le module d'une somme est toujours inférieur ou égal à la somme des modules⁶, on a :

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z) dz| = \int_C |f(z)| |dz| \leq \int_C M |dz| = ML. \quad (2.10)$$

Les propriétés habituelles des intégrales s'étendent immédiatement aux curvilignes et restent donc également vraies pour $\int_C f(z) dz$:

1. linéarité de l'intégrand :

$$\int_C [af(z) + bg(z)] dz = a \int_C f(z) dz + b \int_C g(z) dz, \quad (2.11)$$

où a et b sont des constantes

2. additivité des chemins :

$$\int_{C_1 \cup C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz \quad (2.12)$$

⁵ M existe toujours puisque f est supposée continue (éventuellement par morceaux) et définie sur le contour. La fonction $f[z(t)]$ est donc continue sur le fermé borné $t \in [a, b]$ et y possède toujours un maximum, c'est précisément M .

⁶ L'intégrale est la limite d'une somme, et c'est en vertu de ceci que $|\int_C f(z) dz| \leq \int_C |f(z) dz|$.

3. si $-C$ désigne le contour C parcouru en sens inverse :

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz \tag{2.13}$$

Des définitions de nature topologique doivent maintenant être données, et le seront de façon élémentaire et plutôt intuitive. La toute première notion est celle de *domaine*. En langage élémentaire, un *domaine* est un ensemble de points tel que :

1. autour de tout point on peut tracer un cercle (un voisinage) contenu dans le domaine ;
2. deux points du domaine peuvent être reliés par un chemin situé tout entier dans ce domaine.

La *connexité* d'un domaine est la propriété exprimant la possibilité de rejoindre deux points quelconques d'un domaine en suivant un chemin ne sortant pas du domaine. Suivant cette définition, tout domaine est connexe, la différenciation ci-dessous ne portant que sur le fait d'être *simplement* ou *multiplement* connexe.

Plus précisément, soit dans $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ un contour fermé C ne se recoupant pas ; il délimite un domaine qui est dit, par définition, *simplement connexe* : toute courbe fermée située entièrement dans ce domaine peut être contractée en un point en restant dans le domaine (on dit aussi : toute boucle est *homotope* à zéro). Le cercle est l'archétype de domaine simplement connexe.

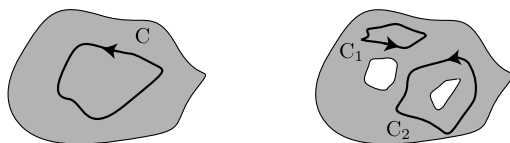


Figure 2.2: Les domaines grisés sont respectivement simplement connexe (à gauche), multiplement connexe (à droite). Les contours C et C_1 sont homotopes à zéro, C_2 ne l'est pas.

Soit maintenant deux domaines simplement connexes \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 avec $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$. Le complémentaire de \mathcal{D}_1 dans \mathcal{D}_2 est tel que, deux points A et B y étant choisis, on peut distinguer deux sortes de chemins : ceux qui relient A à B en pénétrant dans \mathcal{D}_1 , et ceux qui, contournant \mathcal{D}_1 , ne sortent pas du complémentaire. Ce complémentaire est certes *connexe* (c'est d'ailleurs un domaine) puisqu'il existe des chemins allant d'un point à l'autre sans sortir du domaine, mais les chemins fermés ne sont pas tous homotopes à zéro : un tel domaine est dit *multiplement connexe*. On verra bientôt l'importance d'une telle différenciation. Un exemple simple de domaine multiplement connexe est le domaine annulaire situé entre deux cercles de même centre (usuellement appelé *couronne*).

Géométriquement, un domaine simplement connexe ne contient aucun trou, un domaine multiplement connexe contient un ou plusieurs trous.

2.2 Théorème de Cauchy (1825)

Une fonction f étant choisie, l'intégrale $\int_C f(z) dz$ dépend en général du chemin⁷ C . La question que l'on se pose maintenant est la suivante : existe-t-il une classe de fonctions remarquables telles que, les extrémités A et B de C étant fixées, l'intégrale d'une fonction donnée prend la *même* valeur pour *tous* les chemins reliant A à B ?

⁷Tout comme le travail d'une force \vec{F} ne dérivant pas d'un potentiel, $W_C = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$, dépend du chemin suivi dans l'espace par le point d'application de la force. Pour un champ de forces à deux dimensions (dans \mathbb{R}^2), s'il existe une fonction $U(x, y)$ telle que $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$, alors W_C ne dépend que des extrémités de C . Le contexte permet alors d'affirmer que F_x et $-F_y$ peuvent être considérées comme les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe $\mathcal{F}(z) = F_x(x, y) - iF_y(x, y)$; alors, le travail est la partie réelle de $\int_C \mathcal{F}(z) dz$ (tout ceci suppose que U est une fonction continue à dérivées continues).

Le théorème de Cauchy⁸ répond à cette question : cette classe est l'ensemble des fonctions holomorphes. D'une importance capitale, ce théorème est la clé de voûte de l'intégration dans le plan complexe. Il est dû à Cauchy et s'énonce précisément comme suit :

Si $f(z)$ est holomorphe dans un domaine simplement connexe \mathcal{D} , l'intégrale $\int_C f(z) dz$ prend la même valeur pour tous les chemins C inclus dans \mathcal{D} et ayant les mêmes extrémités.

Pour démontrer ce théorème de façon élémentaire, on ajoute l'hypothèse que $f'(z)$ est *continue* (alors que le caractère holomorphe assure seulement l'existence de la dérivée). Avec $f = u + iv$, l'intégrale de f le long de C est :

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (u dy + v dx) . \quad (2.14)$$

D'un autre côté, soit l'intégrale curviligne :

$$\int_{\Gamma} (P dx + Q dy) , \quad (2.15)$$

où Γ est un contour dans le plan \mathbb{R}^2 reliant deux points fixes A et B, et où $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des fonctions données. On sait que l'intégrale curviligne ne dépend pas du chemin suivi si l'intégrand est une différentielle totale, c'est-à-dire s'il existe une fonction $\Phi(x, y)$ telle que $d\Phi = P dx + Q dy$. Pour que la forme linéaire différentielle $P dx + Q dy$ soit une différentielle *totale*, P (*resp.* Q) doit être la dérivée partielle de Φ par rapport à x (*resp.* y) ; ainsi, il faut d'une part que la fonction Φ existe⁹ (nécessairement !), d'autre part que l'on ait précisément :

$$\exists \Phi(x, y) : \quad P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, y) , \quad Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \Phi(x, y) . \quad (2.16)$$

Dans ces conditions, l'intégrale (2.14) est simplement égale à $\Phi(B) - \Phi(A)$, *différence* des valeurs de Φ aux extrémités fixées, et donc indépendante¹⁰ du chemin suivi pour relier l'une à l'autre.

Maintenant, un théorème classique d'Analyse (théorème de Clairaut) établit que si une fonction $\Phi(x, y)$ et ses dérivées¹¹ $\Phi'_x, \Phi'_y, \Phi''_{xy}$ et Φ''_{yx} sont définies et continues en un point, alors les dérivées croisées sont égales :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial x} . \quad (2.18)$$

Autrement dit, pour une fonction continue à dérivées continues¹², peu importe l'ordre dans lequel on effectue les deux dérivations croisées. Cela étant, partant de la condition (2.16) assurant que $P dx + Q dy$ est une différentielle totale, et utilisant (2.18), on trouve :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} . \quad (2.20)$$

⁸La terminologie est quelque peu fluctuante : on appelle parfois *Théorème de Cauchy* la conséquence immédiate du résultat ci-dessous, traduite par l'égalité (2.31), au point que le théorème de Morera (ci-dessous, p. 40) est le plus souvent présenté comme la *réciproque* du théorème de Cauchy.

⁹En Thermodynamique, c'est ce que l'on appelle une *fonction d'état*, c'est-à-dire une fonction qui ne dépend que des variables thermodynamiques (d'équilibre) caractérisant complètement les états initial et final. C'est l'affirmation de l'existence de l'énergie en tant que *fonction* des grandeurs d'état qui constitue la signification du Premier principe. La banalité des mots occulte souvent la profondeur d'une telle affirmation.

¹⁰C'est bien ce qui caractérise une différentielle totale, combinaison linéaire d'accroissements infinitésimaux dont les coefficients sont les dérivées partielles d'une certaine fonction des variables. La somme de toutes les petites différences $\delta\Phi = \Phi(M_{i+1}) - \Phi(M_i)$ se simplifie ($A=M_0, B=M_N$) :

$$\sum_{i=0}^{N-1} \delta\Phi = \sum_{i=0}^{N-1} [\Phi(M_{i+1}) - \Phi(M_i)] = \Phi(M_1) - \Phi(M_0) + \Phi(M_2) - \Phi(M_1) + \dots + \Phi(M_N) - \Phi(M_{N-1}) = \Phi(B) - \Phi(A) . \quad (2.17)$$

¹¹ $\Phi'_x \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x} \equiv \partial_x \Phi$, etc.

¹²C'est ici qu'intervient l'hypothèse de continuité sur $f'(z)$ faite au début, puisque u et v vont jouer des rôles analogues à ceux de P et Q , dérivées premières de Φ , et que la dérivée $f'(z)$ s'exprime (de quatre façons d'ailleurs) à l'aide de u'_x, v'_y, \dots (voir ch. 1). La continuité des dérivées jusqu'à l'ordre 2 inclus pour Φ se reporte sur les dérivées jusqu'à l'ordre 1 inclus de u et v . La continuité de $f'(z)$ signifie que toutes les dérivées u'_x, v'_y, \dots sont à dérivées continues, assurant que le théorème de Clairaut est applicable.

Pour une fonction $x \rightarrow f(x)$, l'existence de la dérivée en un point assure la continuité de f en ce point. Pour une fonction de plusieurs variables, cette proposition n'est pas vraie, voici schématiquement pourquoi.

Soit une fonction $\Phi(x, y)$ ayant des dérivées (premières) dans un voisinage du point (x, y) . L'existence de la dérivée Φ'_x permet d'écrire $\Phi(x+h, y) = \Phi(x, y) + h\Phi'_x(x, y) + \varepsilon_x(h)$ où la fonction $\varepsilon_x(h)$ tend vers zéro quand $h \rightarrow 0$. De ceci on déduit :

Revenant à (2.14), on veut que l'intégrale ne dépende pas du chemin suivi, une condition qui se reporte séparément et indépendamment sur la partie réelle et sur la partie imaginaire de l'intégrale (2.14). Pour la partie réelle, la quantité $u dx - v dy$ doit être une différentielle totale ; (2.20) avec $P = u$ et $Q = -v$ donne :

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} . \quad (2.21)$$

De même pour la partie imaginaire $u dy + v dx$, avec $Q = u$ et $P = v$ (2.20) donne :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} . \quad (2.22)$$

Les deux conditions (2.21) et (2.22) ne sont rien d'autre que les conditions de Cauchy, qui définissent une fonction holomorphe. Le théorème de Cauchy est ainsi démontré.

Il en résulte qu'une intégrale le long d'un certain contour peut aussi être notée $\int_{z_A}^{z_B} f(z) dz$, où z_A et z_B sont les affixes des extrémités A et B du chemin (seules les extrémités sont à préciser puisque l'intégrale ne dépend pas du chemin choisi pour aller de l'une à l'autre). On pourra retenir l'image suivante : finalement, pour une fonction holomorphe dans \mathcal{D} , le chemin est un élastique fixé par deux punaises dans le plan, déformable à souhait (mais en restant toujours dans \mathcal{D}) sans pour autant que les déformations de l'élastique modifient la valeur de l'intégrale.

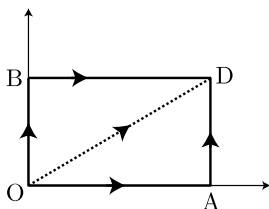


Figure 2.3: Contours utilisés pour le calcul de $\int_O^D z^2 dz$.

Traisons un exemple trivial illustrant le théorème de Cauchy. Soit la fonction $f(z) = z^2$, qui est holomorphe dans le plan entier, et calculons son intégrale le long de plusieurs chemins reliant l'origine au point D de coordonnées (a, b) (voir fig. 2.3), sans utiliser la notion de *primitive* d'une fonction à valeurs complexes (qui sera définie plus loin¹³). Tout d'abord on a :

$$\int z^2 dz = \int (x^2 - y^2 + 2ixy)(dx + idy) = \int [(x^2 - y^2)dx - 2xydy] + i \int [(x^2 - y^2)dy + 2xydx] . \quad (2.24)$$

Prenons en premier le contour OAD. Le long de OA, on a $dy = 0$ et $y = 0$, de sorte que :

$$\int_O^A z^2 dz = \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3} . \quad (2.25)$$

Le long de AD, on a $x = a$ et $dx = 0$:

$$\int_A^D z^2 dz = \int_0^b -2aydy + i \int_0^b (a^2 - y^2)dy = -ab^2 + i(a^2b - \frac{b^3}{3}) . \quad (2.26)$$

$\Phi(x + h, y + k) = \Phi(x, y + k) + h\Phi'_x(x, y + k) + \varepsilon_x(h)$; compte tenu de l'existence de la dérivée Φ'_y , on a aussi :

$$\Phi(x + h, y + k) = \Phi(x, y) + k\Phi'_y(x, y) + \varepsilon_y(k) + h\Phi'_x(x, y + k) + \varepsilon_x(h) , \quad (2.19)$$

où $\varepsilon_y(k) \rightarrow 0$ si $k \rightarrow 0$. Pour que $\Phi(x, y)$ soit continue, il faut donc que $\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} h\Phi'_x(x, y + k) = 0$. C'est le cas si la dérivée seconde $\partial_y \Phi'_x \equiv \partial_y \partial_x \Phi$ existe : ainsi, la continuité de Φ résulte de conditions sur une dérivée seconde de Φ , et non pas sur les seules dérivées premières.

Si en plus les dérivées Φ''_{xy} et Φ''_{yx} sont continues, alors elles sont égales (théorème de Clairaut).

¹³Une fois cette notion définie, on sait écrire :

$$\int_O^D z^2 dz = \left| \frac{z^3}{3} \right|_O^D = \frac{1}{3}(a + ib)^3 - 0^3 = \frac{1}{3}(a^3 + 3ia^2b - 3ab^2 - ib^3) , \quad (2.23)$$

qui est bien le résultat (2.27).

Au total :

$$\int_{\text{OAD}} z^2 dz = \frac{a^3}{3} - ab^2 + i(a^2b - \frac{b^3}{3}) . \quad (2.27)$$

De la même façon, on trouve facilement :

$$\int_{\text{O}}^{\text{B}} z^2 dz = i \int_0^b -y^2 dy = -i \frac{b^3}{3} , \quad (2.28)$$

$$\int_{\text{B}}^{\text{D}} z^2 dz = \int_0^a (x^2 - b^2) dx + i \int_0^a 2bx dx = \frac{a^3}{3} - ab^2 + iba^2 . \quad (2.29)$$

Au total, la somme des seconds membres de (2.28) et (2.29) redonne bien (2.27). Maintenant, le long de la diagonale OD du rectangle, on a $y = \frac{b}{a}x$ et $dy = \frac{b}{a}dx$, de sorte que :

$$\int_{\text{diagonale}} z^2 dz = \int_0^a [(x^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2)dx - 2\frac{b^2}{a^2}x^2 dx] + i \int_0^a [(x^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2)\frac{b}{a}dx + 2\frac{b}{a}x^2 dx] . \quad (2.30)$$

Tous calculs faits, on retrouve encore (2.27).

Une première conséquence immédiate du théorème de Cauchy est la suivante :

Si une fonction $f(z)$ est holomorphe¹⁴ dans un domaine simplement connexe \mathcal{D} , son intégrale $\int_C f(z) dz$ pour tout cycle C situé dans \mathcal{D} est nulle :

$$\boxed{\int_C f(z) dz = 0} \quad (2.31)$$

En effet, soit deux contours C_1 et C_2 distincts mais ayant les mêmes extrémités A et B. D'après le théorème de Cauchy, on a :

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz . \quad (2.32)$$

À l'aide de ces deux contours, on peut faire un cycle C formé par la réunion de C_1 parcouru de A à B, et de C_2 parcouru de B à A, ce que l'on a déjà noté $-C_2$. L'intégrale le long du cycle C est la somme :

$$\int_{\text{cycle}} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{-C_2} f(z) dz , \quad (2.33)$$

mais $\int_{-C_2} f(z) dz = -\int_{C_2} f(z) dz$, de sorte que :

$$\int_{\text{cycle}} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz . \quad (2.34)$$

D'après (2.32), les deux intégrales au second membre sont égales, d'où le résultat exprimé par (2.31). Cette égalité peut d'ailleurs être presque considérée comme une formulation alternative du théorème de Cauchy, tant elle en est une immédiate conséquence.

Une autre démonstration donne d'ailleurs l'occasion de rappeler le théorème de Green, qui s'énonce :

$$\int_C \phi(x, y) dx + \psi(x, y) dy = \int \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy , \quad (2.35)$$

où \mathcal{D} est le domaine du plan délimité par la courbe fermée C définissant le cycle. Ceci permet de récrire (2.14) comme suit :

$$\int_{\text{cycle}} f(z) dz = \int \int_{\mathcal{D}} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \int \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy . \quad (2.36)$$

¹⁴Rappelons qu'en raison de l'équivalence entre holomorphie et analyticité, on peut remplacer holomorphe par analytique et inversement.

En vertu des conditions de Cauchy - Riemann, chaque intégrand est nul, d'où (2.31).

L'articulation des idées essentielles est la suivante. Pour un domaine simplement connexe, *tout* chemin fermé peut être réduit à un point par déformation continue (toute boucle est homotope à zéro) ; la valeur de l'intégrale est indépendante du cycle, or l'intégrale sur un cycle réduit à un point est visiblement nulle (la fonction est bornée et le chemin est de longueur nulle !). Au total, l'intégrale sur tout cycle est nulle.

Par ailleurs, quand la fonction $f(z)$ est continue jusque sur la frontière de son domaine d'analyticité, le résultat (2.31) reste vrai quand le cycle C est précisément cette frontière : grâce à la continuité, l'intégrale le long de la frontière est égale à l'intégrale le long de tout cycle intérieur infiniment proche – pour lequel (2.31) est vrai.

En guise d'illustration, et pour montrer un premier exemple de la puissance de ce théorème, considérons l'intégrale I_n de la fonction (holomorphe) z^n ($n \in \mathbb{N}^*$) le long d'un cercle centré à l'origine et de rayon r . Celui-ci peut ainsi être paramétré suivant $z = re^{i\theta}$, r constant, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, de sorte que l'intégrale cherchée est :

$$I_n \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\text{Cercle de centre O et de rayon } r} z^n dz = \int_0^{2\pi} (re^{i\theta})^n d(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} (r^n e^{in\theta}) (ir e^{i\theta}) d\theta ; \quad (2.37)$$

Au total, l'intégrale vaut $ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} [\cos(n+1)\theta + i \sin(n+1)\theta] d\theta$; cette dernière intégrale est nulle¹⁵ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, puisqu'elle intègre sur un nombre entier de périodes des fonctions périodiques de moyenne nulle. En définitive, l'intégrale I_n est nulle, en accord avec le théorème de Cauchy, puisque z^n , $n \in \mathbb{N}^*$, est une fonction holomorphe dans \mathbb{C} .

Mais ce théorème dit infiniment plus : l'intégrale I_n est toujours nulle quand, au lieu de prendre le cercle ci-dessus, on choisit *n'importe quel contour fermé* du plan. On peut bien déplacer le cercle où on veut et le déformer comme on veut, le résultat ne change pas¹⁶. On mesurera mieux par la suite l'extraordinaire puissance du théorème de Cauchy et ses innombrables applications.

Citons une autre conséquence du théorème de Cauchy, qui permet de définir précisément la primitive d'une fonction holomorphe :

Si une fonction $f(z)$ est holomorphe dans un domaine simplement connexe \mathcal{D} , alors l'intégrale :

$$\int_{z_0}^z f(z') dz' \quad (2.38)$$

considérée comme une fonction $F(z)$ de sa borne supérieure est une fonction holomorphe dans \mathcal{D} , et de plus :

$$F'(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d}{dz} \int_{z_0}^z f(z') dz' = f(z) . \quad (2.39)$$

En effet, par la définition de la dérivée, on a :

$$F'(z) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} [F(z + \xi) - F(z)] = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \left[\int_{z_0}^{z+\xi} f(z') dz' - \int_{z_0}^z f(z') dz' \right] = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \int_z^{z+\xi} f(z') dz' . \quad (2.40)$$

En posant $z' = z + \xi'$, la dernière intégrale est $\int_0^\xi f(z + \xi') d\xi'$, d'où :

$$F'(z) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \int_0^\xi f(z + \xi') d\xi' . \quad (2.41)$$

¹⁵  ce stade, il faut bel et bien exclure le cas n entier négatif, puisque $z^{-|n|}$ n'est pas holomorphe dans le disque centré à l'origine. Une fois définie la primitive d'une fonction holomorphe, on comprendra pourquoi l'intégrale I_n est encore nulle quel que soit le cycle à condition que $n \neq -1$ (ce cas remarquable fait l'objet d'un traitement spécial : voir section 2.3) : la fonction z^n , $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ n'a qu'une seule détermination et reprend donc la même valeur au départ et à l'arrivée (voir (??) p. ??).

¹⁶C'est ici vrai car z^n est holomorphe dans *tout* le plan (ouvert). On verra par la suite que les singularités éventuelles de la fonction à intégrer limitent les déformations possibles du contour.

f étant holomorphe, c'est une fonction continue¹⁷ et sa dérivée existe ; si on pose $f(z + \xi) = f(z) + \eta(z, \xi)$, la fonction $\eta(z, \xi)$ est continue¹⁸ et tend vers zéro avec ξ :

$$f(z + \xi') = f(z) + \eta(z, \xi') , \quad \lim_{\xi' \rightarrow 0} \eta(z, \xi') = 0 ; \quad (2.42)$$

d'où :

$$F'(z) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \int_0^\xi [f(z) + \eta(z, \xi')] d\xi' . \quad (2.43)$$

La première intégrale est simplement $f(z) \int_0^\xi d\xi' = f(z)\xi$, d'où :

$$F'(z) = f(z) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \int_0^\xi \eta(z, \xi') d\xi' ; \quad (2.44)$$

$\eta(z, \xi')$ étant continue, soit $\max_{[0, \xi]} |\eta(z, \xi')|$ le maximum de son module ; l'intégrale est bornée en module par $\max_{[0, \xi]} |\eta(z, \xi')| \int_0^\xi d\xi' = |\xi \max_{[0, \xi]} \eta(z, \xi')|$, d'où :

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\xi} \int_0^\xi \eta(z, \xi') d\xi' \right| \leq \lim_{\xi \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\xi} \right| |\xi \max_{[0, \xi]} \eta(z, \xi')| = \lim_{\xi \rightarrow 0} \max_{[0, \xi]} |\eta(z, \xi')| = 0 . \quad (2.45)$$

Cela étant, (2.44) dit alors que la limite $F'(z)$ existe et vaut $f(z)$: $F(z)$ est donc holomorphe, et sa dérivée n'est autre que $f(z)$. Comme en Analyse réelle, une fonction telle que F est appelée *primitive* de f .

La notion de primitive étant généralisée, il est possible d'énoncer les importants résultats suivants :

1. deux primitives F_1 et F_2 d'une même fonction f diffèrent d'une constante :

$$F_2(z) - F_1(z) = \text{constante} . \quad (2.46)$$

En effet, soit la différence $\Phi(z) = F_2(z) - F_1(z) \equiv U(x, y) + iV(x, y)$. D'après (2.39) $F_1'(z) = f(z) = F_2'(z)$, d'où :

$$\Phi'(z) = 0 . \quad (2.47)$$

Φ est une fonction holomorphe¹⁹ (c'est la différence de deux fonctions holomorphes) ; comme sa dérivée $\Phi'(z)$ est nulle, cette fonction est constante. En effet, comme on l'a vu au chapitre précédent, il existe quatre façons d'écrire la dérivée d'une fonction holomorphe, et notamment :

$$\Phi'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} - i \frac{\partial U}{\partial y} . \quad (2.48)$$

Compte tenu de (2.47), il vient :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial y} - i \frac{\partial U}{\partial y} = 0 , \quad (2.49)$$

soit :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0 , \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 , \quad (2.50)$$

d'où l'on conclut que les fonctions U et V sont constantes.

2. si $F(z)$ est une primitive quelconque d'une fonction holomorphe $f(z)$, alors l'intégrale entre deux points n'est autre que la variation de cette primitive :

$$\boxed{\int_{z_0}^z f(z') dz' = F(z) - F(z_0)} \quad (2.51)$$

¹⁷Rappelons que l'existence de la dérivée $f'(z)$ en un point assure la continuité en z de $f(z)$: ce qui n'est pas (forcément) vrai pour une fonction de deux variables, l'est toujours pour une fonction *holomorphe*.

¹⁸Comme $f'(z)$ existe, on peut même affirmer que $\eta(z, \xi)$ est de la forme $\xi\varepsilon(z, \xi)$ où $\varepsilon(z, \xi)$ tend aussi vers zéro.

¹⁹En particulier, Φ ne dépend que de z , pas de z^* (voir les remarques dans le ch. 1 pp. 14 et 15 au sujet d'une fonction *antiholomorphe*.)

tout comme l'intégrale curviligne de la différentielle d'une fonction est égale à la variation de cette fonction entre les deux extrémités. En effet, soit $F_{z_0}(z)$ la primitive nulle quand $z = z_0$:

$$F_{z_0}(z) = \int_{z_0}^z f(z')dz' , \quad F_{z_0}(z_0) = 0 . \tag{2.52}$$

Soit $F(z)$ une primitive *quelconque* de f . D'après (2.46), $F(z)$ et $F_{z_0}(z)$ diffèrent d'une constante, K :

$$F(z) = F_{z_0}(z) + K \equiv \int_{z_0}^z f(z')dz' + K ; \tag{2.53}$$

en faisant $z = z_0$, l'intégrale est nulle, d'où $F(z_0) = K$ soit $F(z) = \int_{z_0}^z f(z')dz' + F(z_0)$ et la relation (2.51). Comme toujours, la constante additive arbitraire incluse dans la définition de toute primitive $F(z)$ disparaît dans la différence au second membre de (2.51).

Au total, ce que l'on sait des fonctions élémentaires concernant la dérivation et l'intégration se transpose dans le champ complexe pour toute fonction $f(z)$ holomorphe dans un domaine simplement connexe.

2.3 Généralisation au cas d'un domaine multiplement connexe

Quand la fonction n'est holomorphe que dans un domaine *multiplement* connexe, le théorème de Cauchy n'est pas toujours vrai. En pareil cas, il est en effet possible de trouver des contours ne donnant pas toujours la même valeur pour l'intégrale²⁰.

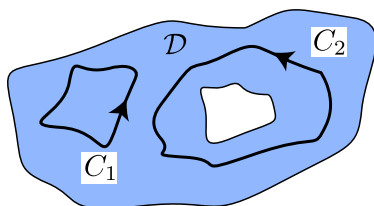


Figure 2.4: Le contour C_1 est homotope à zéro, C_2 ne l'est pas. Le théorème de Cauchy s'applique à tous les contours du type C_1 , mais pas à ceux de la classe C_2 .

Le plus simple est de s'en convaincre sur un exemple²¹. Soit la fonction $z \rightarrow f(z) = \frac{1}{z}$; elle est holomorphe $\forall z \neq 0$ puisque la limite :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{z+h} - \frac{1}{z} \right) \tag{2.54}$$

existe²² $\forall z \neq 0$ (et vaut $-\frac{1}{z^2}$). Holomorphe dans le plan privé de l'origine $\mathbb{C}^* \stackrel{\text{d'eff}}{=} \mathbb{C} \setminus \{0\}$, elle est donc holomorphe dans un domaine délimité par deux contours fermés autour de l'origine ne se recoupant pas, que l'on peut toujours prendre comme deux cercles centrés en O et de rayons r et R ($r < R$) – délimitant une *couronne* circulaire, l'exemple même de domaine multiplement connexe. Comme $f(z)$ y est holomorphe, et qu'il y a équivalence entre holomorphie et analyticité, on dit de cette couronne qu'elle est le (plutôt *un*) domaine d'analyticité de cette fonction.

Comme premier contour, prenons le demi-cercle supérieur C_+ de rayon ρ ($r < \rho < R$) parcouru dans le sens positif de A vers B, qui donne la même valeur à l'intégrale que tout contour C'_+ de mêmes extrémités et situé dans la demi-couronne supérieure (voir fig. 2.5), puisqu'ils peuvent ˆtre superposés par une déformation

²⁰Le théorème reste évidemment vrai pour tous les contours homotopes   zéro situés dans une composante simplement connexe d'un domaine multiplement connexe (contours du type C_1 sur la fig. 2.4).

²¹Un seul contre-exemple suffit !

²² $z = 0$ est donc un point remarquable pour $\frac{1}{z}$ (on s'en sera déjà douté !). C'est un point *singulier* et constitue une *singularité* de cette fonction. Les singularités d'une fonction $f(z)$ seront précisément définies dans le ch. 3, et y feront l'objet d'une classification.

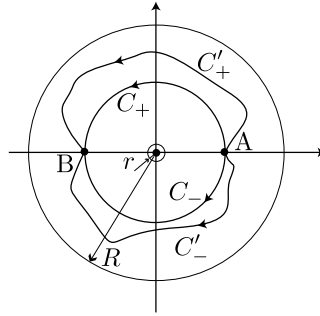


Figure 2.5: Les deux cercles concentriques de rayons respectifs r et R ($r < R$) définissent une couronne circulaire. Pour la fonction $\frac{1}{z}$, les intégrales le long des contours C_+ (resp. C_-) et C'_+ (resp. C'_-) sont égales, celles le long de C_+ et C_- sont différentes.

continue les laissant tout entiers dans le domaine d'analyticité. Le cercle de rayon ρ est décrit par le point dont l'affixe est :

$$z = \rho e^{i\theta} , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi ; \tag{2.55}$$

ici, c'est θ le paramètre au cœur des équations paramétriques du cercle : $x(\theta) = \rho \cos \theta$, $y(\theta) = \rho \sin \theta$.

Pour le demi-cercle supérieur, θ varie de 0 à π ; l'intégrale le long de C'_+ , égale à celle le long de C_+ , s'écrit :

$$\int_{C'_+} \frac{1}{z} dz = \int_{C_+} \frac{1}{z} dz = \int_0^\pi \frac{1}{\rho e^{i\theta}} d(\rho e^{i\theta}) = \int_0^\pi \frac{1}{\rho e^{i\theta}} i\rho e^{i\theta} d\theta = i \int_0^\pi d\theta = i\pi . \tag{2.56}$$

Prenons maintenant des contours dans la demi-couronne inférieure, C'_- et le demi-cercle inférieur C_- , ayant toujours les mêmes extrémités mais forcément décrits dans le sens *négatif*, afin que A reste le point de départ et B celui d'arrivée ; maintenant, θ varie de 0 à $-\pi$:

$$\int_{C'_-} \frac{1}{z} dz = \int_{C_-} \frac{1}{z} dz = \int_0^{-\pi} \frac{1}{\rho e^{i\theta}} d(\rho e^{i\theta}) = \int_0^{-\pi} \frac{1}{\rho e^{i\theta}} i\rho e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{-\pi} d\theta = -i\pi . \tag{2.57}$$

Ainsi, pour deux contours ayant pourtant les mêmes extrémités A et B, l'intégrale prend deux valeurs différentes. En particulier, l'intégrale sur le cycle $C_+ \cup (-C_-)$ n'est pas nulle et vaut $i\pi - (-i\pi) = 2i\pi$; en désignant par C le cercle de rayon ρ (quelconque) centré à l'origine, on a donc le résultat très important :

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 2i\pi . \tag{2.58}$$

Il est bien clair que, si l'intégrale n'est pas nulle, c'est parce que le contour ne peut être réduit à un point tout en restant dans le domaine d'analyticité de la fonction $\frac{1}{z} \equiv z^{-1}$.

D'après le théorème de Cauchy, les intégrales ne changent pas si on remplace C_+ par C'_+ et C_- par C'_- ; en raboutant C'_+ et $-C_-$, on construit un contour fermé (cycle) de forme arbitraire (mais tout entier dans la couronne et ceinturant l'origine). D'où le résultat *fondamental*²³ :

$$\boxed{\int_\Gamma \frac{1}{z} dz = 2i\pi} \tag{2.60}$$

où Γ est n'importe quel contour fermé entourant une fois et une seule²⁴ l'origine et décrit dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Ce résultat est évidemment à rapprocher du fait qu'une primitive de $\frac{1}{z}$ est $\ln z$ et

²³Clairement, ceci se généralise immédiatement en :

$$\int_{\Gamma_{z_0}} \frac{1}{z - z_0} dz = 2i\pi , \tag{2.59}$$

où Γ_{z_0} est une boucle autour de z_0 .

²⁴D'après le calcul précédent, il est bien évident que si on tourne deux fois, on trouve $4i\pi$, etc.

que la variation du logarithme sur une boucle dépend de la position de l'origine par rapport à cette boucle : nulle si l'origine est à l'extérieur, égale $2i\pi$ si elle est à l'intérieur.

L'idée essentielle à retenir est donc celle-ci : le domaine d'analyticité \mathcal{D} étant précisé et les extrémités du chemin étant fixes (et situées dans \mathcal{D} !), ce dernier peut être déformé continûment *ad libitum*   condition de rester tout entier dans \mathcal{D} . Il est manifeste que dans l'exemple ci-dessus, le demi-cercle inférieur ne peut pas être superposé au demi-cercle supérieur par une déformation continue qui le laisse dans la couronne comprise entre les deux cercles de rayon r et R . Le point capital est la notion de déformation *continue* du contour dans le plan en le laissant tout entier dans une partie connexe, une opération dont le sens intuitif est clair et se passe de toute définition précise. Autrement dit, toutes les déformations de l'élastique le laissant en contact avec le plan (les frontières des parties simplement connexes étant des murs infranchissables), laissent invariante la valeur de l'intégrale : dans l'exemple ci-dessus, il ne faut pas faire "décoller" le chemin pour lui permettre de sauter par dessus le cercle intérieur (de rayon aussi petit que l'on veut d'ailleurs) contenant l'origine. On se convaincra peu à peu que le calcul intégral avec des fonctions holomorphes est essentiellement un *jeu de l'élastique* d'un genre particulier.

Les mêmes raisons permettent d'argumenter pour montrer que la notion de primitive s'étend également au cas d'un domaine non simplement connexe (voir l'exemple du logarithme, traité dans la sous-section 2.6.2).

2.4 Formule de Cauchy

La formule de Cauchy est, avec le théorème de Cauchy, l'un des résultats majeurs de ce chapitre. Elle s'énonce comme suit :

Soit une fonction $f(z)$ holomorphe dans un domaine simplement connexe \mathcal{D} . Alors $\forall z \in \mathcal{D}$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \tag{2.61}$$

où C est un chemin contenu dans \mathcal{D} et tournant une fois autour de z dans le sens positif²⁵.

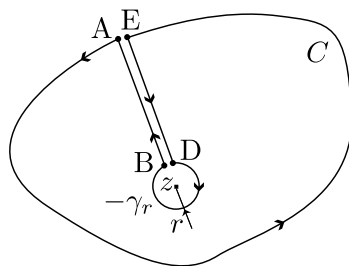


Figure 2.6: Contour utilisé pour établir la formule de Cauchy.

Pour démontrer cette formule, soit le contour $\Gamma \stackrel{\text{déf}}{=} C \cup ED \cup (-\gamma_r) \cup BA$ de la figure 2.6 ; en vertu du théorème de Cauchy, l'intégrale suivante est nulle :

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0 ; \tag{2.62}$$

comme les contributions des deux segments de droite se compensent, ceci s'écrit aussi :

$$\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi . \tag{2.63}$$

²⁵En particulier, si f est continue sur la frontière $\partial\mathcal{D}$ de \mathcal{D} , on peut prendre $C = \partial\mathcal{D}$.

Soit maintenant la différence $\Delta \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi - f(z)$, qui est visiblement *ind\'ependante* du rayon r du petit cercle. En vertu de (2.60), le deuxi\eme terme s'\'ecrit tout autant :

$$\frac{1}{2i\pi} \times f(z) \times 2i\pi = \frac{1}{2i\pi} f(z) \int_{\gamma_r} \frac{1}{\xi-z} d\xi = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{\xi-z} d\xi, \quad (2.64)$$

d'o\u00f9, compte tenu de (2.63), une autre expression de Δ :

$$\Delta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi-z} d\xi. \quad (2.65)$$

$f(z)$ \u00e9tant continue, sur le petit cercle on a $f(\xi) = f(z) + \eta(\xi, z)$ avec $\lim_{r \rightarrow 0} |\eta(\xi, z)| = 0$: le num\u00e9rateur est donc aussi petit que l'on veut. Avec $\xi = z + r e^{i\theta}$, l'\u00e9l\u00e9ment diff\u00e9rentiel est $ir e^{i\theta} d\theta$, le d\u00e9nominateur est $r e^{i\theta}$: il reste finalement $\Delta = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \eta(\xi, z) d\theta$, int\u00e9grale qui est aussi petite que l'on veut quand $r \rightarrow 0$; ainsi, la diff\u00e9rence Δ est d'une part ind\u00e9pendante de r , d'autre part aussi petite que l'on veut : elle est donc *strictement nulle*, ce qui \u00e9tablit²⁶ la formule de Cauchy (2.61). Cette formule est assez extraordinaire : elle montre que les valeurs de la fonction $f(z)$ dans son domaine d'analyticit\u00e9 ne d\u00e9pendent que de ses valeurs sur le contour C , qui peut d'ailleurs \u00eatre la fronti\u00e8re $\partial\mathcal{D}$ de \mathcal{D} (si f y est continue).

On verra que cette formule a de nombreuses cons\u00e9quences tr\u00e8s importantes. Une toute premi\u00e8re est ce que l'on appelle *la formule de la moyenne*, qui s'exprime comme suit :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(z + r e^{i\theta}) d\theta \quad (2.66)$$

Pour \u00e9tablir cette formule, repartons de la formule de Cauchy (2.61) et prenons pour C le cercle γ_r de centre z et de rayon r , o\u00f9 $\xi = z + r e^{i\theta}$; il vient :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z + r e^{i\theta})}{r e^{i\theta}} i r e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(z + r e^{i\theta}) d\theta, \quad (2.67)$$

d'o\u00f9 la formule de la moyenne (2.66). Comme $e^{i\theta}$ est 2π -p\u00e9riodique, ce r\u00e9sultat reste vrai pour n'importe quel intervalle d'amplitude 2π ; θ_0 d\u00e9signant un angle quelconque, on a donc tout autant :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} f(z + r e^{i\theta}) d\theta. \quad (2.68)$$

Le second membre de (2.68) peut bien \u00eatre consid\u00e9r\u00e9 comme une *moyenne* : c'est la moyenne des valeurs de la fonction f sur le cercle de centre z , l'angle θ \u00e9tant tir\u00e9 au hasard uniform\u00e9ment²⁷ l'intervalle $[-\pi, +\pi[$. On obtient ainsi un r\u00e9sultat assez extraordinaire : la valeur de f au centre du cercle est la moyenne des valeurs sur le cercle, et ce quel qu'en soit le rayon²⁸ !

En \u00e9crivant les choses comme en th\u00e9orie des probabilit\u00e9s, et d\u00e9signant par $P(\theta)$ la densit\u00e9 de probabilit\u00e9 (ici uniforme, c'est-\u00e0-dire "plate"), on a :

$$\text{moyenne de } f(z + r e^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{+\pi} P(\theta) f(z + r e^{i\theta}) d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{2\pi} f(z + r e^{i\theta}) d\theta, \quad (2.69)$$

d'o\u00f9 une autre \u00e9criture de ce r\u00e9sultat :

$$f(z) = \langle f(z + r e^{i\theta}) \rangle. \quad (2.70)$$

²⁶Ce r\u00e9sultat appara\u00eetra presque \u00e9vident en consid\u00e9rant la s\u00e9rie de Taylor de $f(z)$ (voir ch. 3), soit $f(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} (\xi - z)^n f^{(n)}(z)$; apr\u00e8s multiplication par $\frac{1}{\xi - z}$, et tirant parti de la convergence uniforme de ce d\u00e9veloppement, on obtient une s\u00e9rie de terme g\u00e9n\u00e9ral $\frac{1}{n!} \int_C (\xi - z)^{n-1} f^{(n)}(z) d\xi$. La param\u00e9trisation $\xi - z = r e^{i\theta}$ fait ressortir des int\u00e9grales $\frac{1}{n!} f^{(n)}(z) \int_0^{2\pi} (r e^{i\theta})^n d\theta$, qui sont toutes nulles \u00e0 l'exception du terme $n = 0$, qui donne $2i\pi f(z)$.

²⁷*uniform\u00e9ment r\u00e9parti* signifie que la densit\u00e9 de probabilit\u00e9 $P(\theta)$ est *constante* sur cet intervalle ; la normalisation ("somme des probabilit\u00e9s = 1") s'écrit $\int_{-\pi}^{+\pi} P(\theta) d\theta = 1$ et donne imm\u00e9diatement $P(\theta) = \frac{1}{2\pi}$.

²⁸Il faut bien s\u00fbr que le cercle reste dans le domaine d'holomorphie de $f(z)$.

Comme toujours, une telle formule remarquable permet d'établir des résultats non triviaux. Par exemple, prenons $f(z) = e^z$; alors (2.67) donne :

$$e^z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^z e^{re^{i\theta}} d\theta \iff \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{re^{i\theta}} d\theta = 1 ; \tag{2.71}$$

cette dernière égalité n'a rien d'évident à première vue²⁹, pas plus d'ailleurs que les deux égalités qui en découlent immédiatement en séparant les parties réelle et imaginaire.

Il y a bien plus ; la formule de la moyenne lève le voile sur un résultat autrement plus profond, appelé *Principe du maximum* : le module d'une fonction holomorphe dans \mathcal{D} et continue sur la frontière prend sa valeur maximum quelque part sur la frontière de \mathcal{D} . Donnons le fil de l'argument permettant de comprendre intuitivement pourquoi il en est ainsi. Récrivons la formule de la moyenne (2.68) en notant z_0 le centre du cercle C_0 d'équation $z_0 + re^{i\theta}$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta ; \tag{2.72}$$

on a $|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta$. En appelant M_1 le maximum de $|f(z)|$ sur le cercle C_0 , on a donc :

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_1 d\theta = \frac{1}{2\pi} M_1 \times 2\pi = M_1 ; \tag{2.73}$$

ainsi, le module de $f(z_0)$ est plus petit (ou égal) à sa plus grande valeur sur le cercle. Supposons que le maximum M_1 soit atteint au point z_1 ; on peut alors introduire le cercle C_1 de centre z_1 et de rayon r et, utilisant la formule de la moyenne, affirmer que le module de f en z_1 est plus petit que la valeur maximum M_2 atteinte quelque part sur le cercle C_1 , sur sa portion de circonférence *extérieure* à C_0 . Répéter ce processus met en évidence une famille de cercles et une suite monotone croissante de bornes supérieures M_n pour $|f(z)|$. Jusqu'où peut-on aller ? Visiblement jusqu'à la frontière du domaine où f est holomorphe, et en supposant $f(z)$ continue sur cette frontière, d'où le Principe du maximum.

Cela étant compris, on peut affirmer que si $f(z)$ ne s'annule pas dans \mathcal{D} , alors le *minimum* de $|f(z)|$ est également sur la frontière de \mathcal{D} . En effet, si $f(z) \neq 0 \forall z \in \mathcal{D}$, la fonction $\frac{1}{f(z)}$ est holomorphe dans \mathcal{D} ; le maximum de son module est donc sur la frontière, et c'est aussi le minimum de $|f(z)|$.

Les mêmes propriétés valent tout autant pour les parties réelle et imaginaire de f : il suffit de raisonner avec les fonctions holomorphes $F(z) \stackrel{\text{déf}}{=} e^{f(z)}$ et $G(z) \stackrel{\text{déf}}{=} e^{if(z)}$, dont les modules sont respectivement $e^{u(x,y)}$ et $e^{-v(x,y)}$. L'inexistence d'extremum pour $u(x,y)$ et $v(x,y)$ a déjà été relevé en tant que conséquence des conditions de Cauchy - Riemann, qui entraînent $\Delta u = \Delta v = 0$.

2.5 Dérivées d'ordre supérieur

La propriété d'analyticité d'une fonction $f(z)$ fait de celle-ci un objet très robuste, et a des conséquences innombrables, dont les plus importantes viennent d'être données. Une autre propriété remarquable peut être énoncée comme suit³⁰ :

Si une fonction $f(z)$ est holomorphe dans un domaine simplement connexe \mathcal{D} et continue sur $\bar{\mathcal{D}}$, elle possède en chaque point de \mathcal{D} des dérivées de tous les ordres ; la dérivée d'ordre n est donnée par la formule :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \tag{2.74}$$

où $\partial\mathcal{D}$ est la frontière³¹ de \mathcal{D} .

²⁹Sauf si on développe l'intégrand en série, on invoque la convergence uniforme et on utilise le fait que $\int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta = 2\pi\delta_{n0}$.

³⁰Pour se souvenir des détails de (2.74), penser à l'homogénéité, en imaginant que z n'est pas un nombre pur.

$\bar{\mathcal{D}}$ désigne le domaine fermé formé par \mathcal{D} et sa frontière $\partial\mathcal{D}$.

³¹Référence est faite à la frontière pour obtenir le résultat dans le domaine le plus vaste possible. Le même résultat vaut pour tout contour fermé C entourant le point d'affixe z , l'essentiel étant que C contienne z en son intérieur.

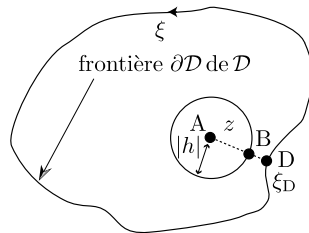
La propriété pour une fonction holomorphe d'être *infinitement* dérivable a été suspectée dès le chapitre 1, une fois établies les conditions de Cauchy - Riemann. L'existence de $f^{(n)}$ va maintenant être établie en démontrant par récurrence la formule (2.74).

Prenons d'abord $n = 1$; par la définition de la dérivée :

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} ; \tag{2.75}$$

à l'aide de la formule de Cauchy, le second membre s'écrit successivement :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} \left[\frac{f(\xi)}{\xi - (z+h)} - \frac{f(\xi)}{\xi - z} \right] d\xi = \frac{1}{2i\pi} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)(\xi - z)} d\xi . \tag{2.76}$$



$$|\xi - (z+h)| \geq BD = |\xi_D - z| - |h|$$

Figure 2.7: ξ_D est l'affixe de D, point de la frontière $\partial\mathcal{D}$ de \mathcal{D} le plus proche du cercle de centr z et de rayon $|h|$.

Le terme $\frac{1}{\xi - z - h}$ tend uniformément vers $\frac{1}{\xi - z}$ quand $h \rightarrow 0$. En effet, z et $|h|$ étant fixés, $z+h$ décrit le cercle de centre z et de rayon $|h|$. Soit ξ_D l'affixe du point de la frontière le plus proche de ce cercle. Alors, pour tout point ξ de la frontière, on a $|\xi - z| \geq |\xi_D - z| \equiv AD$ et $|\xi - (z+h)| \geq |\xi_D - z| - |h| \equiv BD$. Il en résulte que :

$$\left| \frac{1}{\xi - (z+h)} - \frac{1}{\xi - z} \right| = \left| \frac{h}{[\xi - (z+h)](\xi - z)} \right| \leq \frac{h}{(|\xi_D - z| - |h|) |\xi_D - z|} . \tag{2.77}$$

Cette dernière quantité est une borne indépendante de ξ , et tend vers zéro avec h , ce qui établit la convergence uniforme en ξ de la quantité au premier membre. On peut donc intervertir limite et intégration (la limite de l'intégrale est égale à l'intégrale de la limite, $[\lim, \int] = 0$). Prenant dans (2.76) la limite sous l'intégrale :

$$f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi , \tag{2.78}$$

établissant la formule annoncée pour $n = 1$, ce qui constitue la "condition initiale" du raisonnement par récurrence.

Supposons maintenant que $f^{(n)}$ est donnée par l'expression (2.74) ; alors, par définition de la dérivée :

$$f^{(n+1)}(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(z+h) - f^{(n)}(z)}{h} , \tag{2.79}$$

soit, par hypothèse :

$$f^{(n+1)}(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} f(\xi) \left[\frac{1}{[\xi - (z+h)]^{n+1}} - \frac{1}{(\xi - z)^{n+1}} \right] d\xi . \tag{2.80}$$

En réduisant au même dénominateur le grand crochet, et en utilisant la formule du binôme pour arranger le numérateur qui en résulte, il vient :

$$f^{(n+1)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\partial\mathcal{D}} f(\xi) \frac{(n+1)h(\xi - z)^n + \mathcal{O}(h^2)}{(\xi - z - h)^{n+1}(\xi - z)^{n+1}} d\xi = \frac{(n+1)!}{2i\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+2}} d\xi , \tag{2.81}$$

où la propriété de convergence uniforme (en ξ) a été de nouveau invoquée pour légitimer la dernière égalité. Ainsi, si la relation (2.74) est vraie pour n , elle l'est aussi pour $n+1$; comme elle est démontrée pour $n = 1$, elle

est vraie pour tout n fini, ce qui achève la démonstration par récurrence. On obtient ici le résultat très important déjà suspecté à plusieurs reprises : dès qu'une fonction est holomorphe (c'est-à-dire *une fois* dérivable), elle est *infinitement* dérivable, et on dispose maintenant en plus d'une expression intégrale pour la dérivée d'ordre n , expression qui peut d'ailleurs être considérée comme une généralisation de la formule de Cauchy (2.61), cette dernière étant vue comme (2.74) avec $n = 0$.

En bout de course on peut remarquer que les expressions (2.78) et plus généralement (2.74) des dérivées s'obtiennent directement par dérivations sous le signe intégrale : les démonstrations ci-dessus montrent que de telles opérations sont légitimes, grâce à la convergence uniforme.

La formule (2.74) permet de démontrer d'importantes inégalités, appelées inégalités de Cauchy, énonçant des bornes supérieures pour toutes les dérivées d'une fonction holomorphe. Soit M le maximum du module d'une fonction f holomorphe dans un domaine \mathcal{D} , et soit d_{\min} la plus petite distance de z à la frontière $\partial\mathcal{D}$ de \mathcal{D} (c'est-à-dire $d_{\min} = \min_{\xi \in \partial\mathcal{D}} |\xi - z|$). En notant L la longueur de $\partial\mathcal{D}$, (2.74) permet d'écrire :

$$|f^{(n)}(z)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{M}{d_{\min}^{n+1}} d\xi \right| = \frac{n!}{2\pi} \frac{ML}{d_{\min}^{n+1}}. \quad (2.82)$$

En particulier, si $f(z)$ est holomorphe (analytique) dans un disque $|z - z_0| < R$ et en choisissant ce dernier comme domaine \mathcal{D} , alors la plus petite distance est $d_{\min} = R$ et $L = 2\pi R$. Dans ces conditions, (2.82) devient :

$$\boxed{|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!M}{R^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)} \quad (2.83)$$

Ces inégalités permettent de démontrer l'important théorème de Liouville³² :

Une fonction holomorphe pour toute valeur finie de z et bornée est une constante

Dit autrement : les seules fonctions entières bornées sont des constantes. Soit z un complexe donné ; si $f(z)$ est bornée et entière, l'inégalité (2.83) avec $n = 1$ donne :

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R}, \quad (2.84)$$

z étant le centre du cercle de rayon R , et M une borne supérieure pour $|f(z')|$ quel que soit z' dans \mathbb{C} . Comme f est entière, on peut choisir R aussi grand que l'on veut, de sorte le premier membre est en fait nul : $f'(z) = 0$; comme z est quelconque, on a $f'(z) \equiv 0$. Maintenant, par définition de la primitive d'une fonction holomorphe (ce qu'est $f'(z)$), on a :

$$f(z) - f(z_0) = \int_{z_0}^z f'(z') dz' \quad \forall z, \quad (2.85)$$

et comme $f'(z) = 0$, il vient :

$$f(z) - f(z_0) = 0 \iff f(z) = f(z_0) \quad \forall z, \quad (2.86)$$

qui montre que la fonction $f(z)$ prend la même valeur partout. En d'autres termes, une fonction entière qui n'est pas constante doit diverger *quelque part* quand $|z| \rightarrow +\infty$ (mais pas forcément quel que soit l'argument de z) ; par exemple e^z est une fonction entière (qui n'est pas constante !) qui diverge si $|z| \rightarrow +\infty$, $\Re z > 0$, mais qui tend vers zéro si $|z| \rightarrow +\infty$, $\Re z < 0$.

Il est maintenant possible d'établir la réciproque du théorème de Cauchy, appelée théorème de Morera, qui s'énonce comme suit :

Si une fonction $f(z)$ est continue³³ dans un domaine simplement connexe \mathcal{D} et si l'intégrale $\int_C f(z) dz$ pour tout cycle C situé dans \mathcal{D} est nulle, alors $f(z)$ est holomorphe dans ce domaine.

³²aussi appelé *théorème de Cauchy - Liouville*.

³³Il faut bien que la fonction soit continue : z^{-n} , avec n entier et $n \geq 2$ satisfait bien (2.87) mais n'est pas continue dans \mathbb{C} .

En effet, décomposons le cycle C en deux chemins distincts, C_1 allant d'un point A à un point B, l'autre C_2 allant de B à A. Par hypothèse, les intégrales le long de C_1 et de $-C_2$ sont égales. La fonction étant supposée continue partout dans \mathcal{D} , cette opération peut être faite pour n'importe quel cycle, d'où l'on déduit que, pour tous les chemins dans \mathcal{D} , l'intégrale ne dépend que des extrémités. Il en résulte d'après ci-dessus que, z_0 étant fixé, la relation :

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz \quad (2.87)$$

définit une fonction F holomorphe dans \mathcal{D} , donc possédant une dérivée $F'(z)$. F' , en tant que dérivée d'une fonction holomorphe, est aussi une fonction holomorphe ; mais F' n'est autre que f , ce qui démontre le théorème de Morera.

2.6 Illustrations

Il s'agit d'illustrer les résultats importants obtenus ci-dessus à propos de la fonction $z \rightarrow Z = z^n \equiv f(z)$ où $n \in \mathbb{Z}$. Ce choix n'est pas innocent, dans la perspective d'étudier ultérieurement la possibilité de représenter une fonction quelconque par une série de puissances entières (positives ou négatives). Visiblement, selon que n est positif ou négatif, $f(z)$ est bornée ou non. Ceci justifie, pour la clarté, d'étudier les différents cas séparément.

2.6.1 $n = 0, 1, 2, \dots \iff n \in \mathbb{N}$

Pour les valeurs entières positives ou nulles de n , z^n est holomorphe dans tout le plan (ouvert). Par le théorème de Cauchy (voir (2.31)), on a donc de suite :

$$\int_C z^n dz = 0, \quad (2.88)$$

où C est n'importe quel contour fermé. Ce résultat s'obtient aussi d'une autre façon : la primitive de $f(z) = z^n$ est $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$. Pour un chemin quelconque reliant deux points d'affixes z_1 et z_2 , on a donc :

$$\int_{z_1}^{z_2} z^n dz = \left[\frac{z^{n+1}}{n+1} \right]_{z_1}^{z_2} = \frac{1}{n+1} (z_2^{n+1} - z_1^{n+1}). \quad (2.89)$$

Si on adopte la représentation polaire, $z_j = \rho_j e^{i\theta_j}$, il vient donc :

$$\int_{z_1}^{z_2} z^n dz = \frac{1}{n+1} [\rho_2^{n+1} e^{(n+1)i\theta_2} - \rho_1^{n+1} e^{(n+1)i\theta_1}]; \quad (2.90)$$

La fonction $z^{n \in \mathbb{N}}$ n'ayant qu'une seule détermination, le choix $z_1 = z_2 = z_0$ annule manifestement le second membre quel que soit C .

Explicitement, avec $z_1 = z_2 = z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$, le second membre de (2.90) est bien nul quel que soit le contour, qu'il contienne ou non l'origine. Dans le premier cas, quand on décrit le cycle, l'argument part de la valeur θ_0 et y revient strictement à la fin du cycle. Dans ce second cas (l'origine est à l'intérieur du cycle), l'argument part de θ_0 et vaut $\theta_0 + 2\pi$ à la fin, mais comme³⁴ $e^{i(n+1)(\theta_0+2\pi)} = e^{i(n+1)\theta_0}$ puisque $e^{i(n+1)2\pi} = 1 \forall n \in \mathbb{N}$ (et même pour $n \in \mathbb{Z}$), le second membre de (2.90) est encore nul.

Illustrons maintenant la formule de Cauchy, qui s'écrit ici :

$$z^n = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{\xi^n}{\xi - z} d\xi; \quad (2.91)$$

si on veut fixer les idées, on peut avoir en tête³⁵ une fois pour toutes le contour C formé par le cercle γ_R de rayon R centré sur z .

³⁴ C 'est ici que l'hypothèse $n \in \mathbb{N}$ est cruciale.

³⁵Le peu qui a été dit sur les possibilités de déformer continûment le contour (sans faire décoller l'élastique) permet de deviner que les résultats énoncés avec γ_R restent vrais pour tout contour fermé entourant z .

Il s'agit donc de calculer directement le second membre de (2.91) et de vérifier qu'il vaut z^n . Pour cela, on écrit $\xi^n = [(\xi - z) + z]^n$ et on développe suivant la formule du binôme. Il vient alors :

$$\int_C \frac{\xi^n}{\xi - z} d\xi = \sum_{p=0}^n C_n^p z^{n-p} \int_C (\xi - z)^{p-1} d\xi . \quad (2.92)$$

Comme on l'a vu dans la section 2.3, le terme $p = 0$ mérite une attention particulière. En extrayant ce terme de la sommation, il vient :

$$\int_C \frac{\xi^n}{\xi - z} d\xi = z^n \int_C \frac{d\xi}{\xi - z} + \sum_{p=1}^n C_n^p z^{n-p} \int_C (\xi - z)^{p-1} d\xi \quad (2.93)$$

Toutes les intégrales de la sommation de (2.93) sont nulles³⁶, puisqu'elles sont précisément de la forme $\int_C \xi'^q d\xi'$ avec $q = p - 1 \geq 0$. Seule survit l'intégrale mise à part, venant du terme $p = 0$; d'après (2.59), elle vaut $2i\pi$. Au total, le second membre de (2.91) vaut bien $\frac{1}{2i\pi} z^n (2i\pi) = z^n$, en accord avec la formule de Cauchy.

2.6.2 $n = -1, -2, \dots \iff n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

À nouveau, il convient à ce stade d'effectuer une distinction, en traitant successivement les deux cas, $n = -1$ et $n \neq -1$.

■ $n = -1$

Pour tout contour fermé qui ne contient pas l'origine en son intérieur – donc situé tout entier dans une composante simplement connexe du domaine d'holomorphic –, le théorème de Cauchy donne :

$$\int_C z^{-1} dz = 0 , \quad (2.94)$$

Tant que le contour est tout entier situé dans une telle composante, la primitive³⁷ de $\frac{1}{z}$ est bien définie, c'est $\ln z$, donc :

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z} dz = [\ln z]_{z_1}^{z_2} = \ln z_2 - \ln z_1 , \quad (2.95)$$

On sait que la fonction logarithme possède une infinité de déterminations, différant de $2ik\pi$ les unes des autres ($k \in \mathbb{Z}$) ; bien évidemment, pour calculer la variation $\ln z_2 - \ln z_1$, il faut prendre la *même* détermination pour chaque terme, de sorte que par différence, le résultat est le même quelle que soit la détermination choisie³⁸. Il en résulte :

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z} dz = \ln \frac{|z_2|}{|z_1|} + i\theta_{21} \quad (2.96)$$

où l'angle θ_{21} est l'angle représentant la variation de l'argument quand on se déplace continûment de z_1 à z_2 . Prenons maintenant un contour partant de z_1 et se terminant en z_2 infiniment voisin de z_1 . Si le contour choisi ne contient pas l'origine, la variation de l'argument est nulle ($\theta_{21} = 0$) et (2.94) est vérifiée. Si le cycle contient l'origine, cela a encore un sens de manipuler la primitive puisque l'on peut rester dans une composante

³⁶Ceci se vérifie aussi directement, en posant $\xi = z + Re^{i\theta}$. L'intégrand est alors de la forme $(Re^{i\theta})^{p-1} iRe^{i\theta} = iR^p e^{ip\theta}$. Comme p est un entier strictement positif, l'intégrale de 0 à 2π est nulle (une telle intégrale est en fait nulle $\forall p \in \mathbb{Z}^*$).

³⁷À un niveau élémentaire, on apprend que la primitive de z^n est $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ pour $n \neq -1$, et $\ln z$ si $n = -1$, ce qui est indéniable. Il est toutefois intéressant de remarquer que le résultat (2.95) peut s'obtenir en partant du cas général en y faisant tendre n vers -1 dans la différence $\frac{1}{n+1}(z_2^{n+1} - z_1^{n+1})$ (et en prenant soin bien sûr de ne manipuler qu'une détermination du logarithme, choisie (arbitrairement) une fois pour toutes).

Ce "miracle" se produit tout simplement parce que la primitive de z^α est, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, égale à $\frac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ (comme on le voit en revenant à la définition de la fonction puissance généralisée). La limite $\alpha \rightarrow -1$ se trouve facilement en écrivant $z^{\alpha+1} = e^{(\alpha+1)\ln z}$ et en développant l'exponentielle autour de $\alpha = -1$.

³⁸Tout comme, en Physique, quand on calcule une variation d'énergie potentielle : le résultat est unique (c'est le travail de la force, qui n'a qu'une seule valeur !) et se moque de la constante additive choisie une fois pour toutes pour l'énergie potentielle.

simplement connexe (voir fig. 2.8) ; allant de z_1 à z_2 , on fait un tour (presque) complet, la variation de l'argument vaut $+2\pi - 0$ ($\theta_{z_2} = 2\pi$) et l'intégrale au premier membre de (2.94) vaut $i \times 2\pi$, en accord avec le résultat obtenu en (2.58) par considération d'un cycle circulaire. Noter que, ce faisant, on ne franchit pas la coupure figurée par le tortillon semi-infini à double flèche partant de l'origine (voir fig. 2.8). Tout naturellement, la primitive étant multiforme, elle ne reprend pas la même valeur une fois que l'on est arrivé en z_2 infiniment voisin de z_1 .

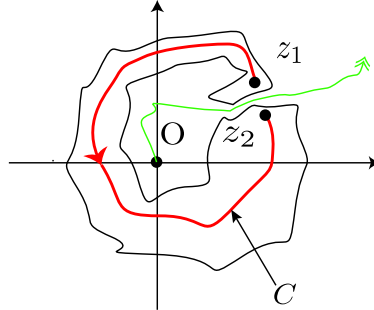


Figure 2.8: Le contour C relie deux points infiniment voisins z_1 et z_2 tout en restant dans un domaine simplement connexe où $\frac{1}{z}$ est holomorphe.

■ $n \neq -1$

À nouveau, la fonction analysée $f(z) = z^n \equiv \frac{1}{z^{|n|}}$ est holomorphe dans \mathbb{C} privé de l'origine. Pour tout contour fermé qui ne contient pas l'origine en son intérieur, on a donc toujours :

$$\int_C z^{-|n|} dz = 0, \quad (2.97)$$

ce que l'on peut retrouver aussi en calculant la variation de la primitive $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1} \equiv \frac{1}{(n+1)z^{|n|-1}}$: c'est une fonction à une seule détermination, qui reprend donc la même valeur au départ et à l'arrivée.

Il en encore va de même si le contour C contient l'origine, pour la même raison : comme n est un entier $\neq -1$, la primitive $F(z)$ reprend la même valeur quand si l'argument de z a augmenté de 2π . Toutefois, *on ne peut pas ici invoquer le théorème de Cauchy*, qui suppose la fonction holomorphe dans le domaine ceinturé par le contour. Ceci n'est pas non plus en contradiction avec le théorème de Morera, qui exige que la fonction soit *continue* partout dans \mathcal{D} , ce qui n'est pas le cas ici.

En rassemblant tous ces résultats, on peut finalement écrire :

$$\int_C (z - z_0)^n dz = 2i\pi \delta_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2.98)$$

où C est un contour contenant z_0 en son intérieur.

◆ *Remarques*

- Il faut bien retenir que dans les énoncés des théorèmes précédents, chaque mot pèse : holomorphe, simplement connexe et, éventuellement, quantificateur ($\forall C$, par exemple).

1. dans l'exemple qui vient d'être donné, le théorème de Cauchy n'est pas applicable puisque le contour se situe dans un domaine *multiplement* connexe (typiquement : une couronne délimitée par deux cercles centrés à l'origine), domaine d'holomorphie de la fonction.

2. un autre exemple, où l'hypothèse manquante n'est pas la simple connexité, mais le fait que la fonction n'est pas holomorphe. Soit la fonction $z \rightarrow z^{*2} = f(z)$, visiblement non holomorphe ; il est facile de montrer³⁹ que :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\xi^{*2}}{\xi - z} d\xi = z^{*2} , \tag{2.99}$$

où Γ est un cercle centré sur z et de rayon quelconque. À nouveau, (2.99) a tout l'air d'être un cas particulier de la formule de Cauchy, mais il n'en est rien, puisque $f(z)$ n'est pas holomorphe.

- Le cas où n est quelconque (pas entier, mais réel voire complexe) est très intéressant en soi, mais exige une étude particulière : en effet, la fonction z^α étant multiforme, tous les théorèmes énoncés plus haut doivent être revisités et, éventuellement, convenablement généralisés (c'est ce qui justifie fondamentalement l'introduction des surfaces de Riemann, abordée ultérieurement – voir section 3.6). Une chose est sûre : pour α réel quelconque se substituant à n , (2.90) devient :

$$\int_{z_1}^{z_2} z^\alpha dz = \frac{1}{\alpha + 1} [\rho_2^{\alpha+1} e^{i(\alpha+1)\theta_2} - \rho_1^{\alpha+1} e^{i(\alpha+1)\theta_1}] . \tag{2.100}$$

Si z_2 est infiniment proche de $z_1 = z_0$, le second membre est nul ou non, selon que l'on a tourné ou non autour de l'origine. Dans le premier cas, l'argument part d'une valeur donnée θ_0 et y revient :

$$\int_{\text{cycle ne contenant pas O}} z^\alpha dz = \frac{1}{\alpha + 1} \rho_0^{\alpha+1} [e^{i(\alpha+1)\theta_0} - e^{i(\alpha+1)\theta_0}] = 0 . \tag{2.101}$$

Au contraire, si l'origine est à l'intérieur du contour, on ne peut pas réellement fermer celui-ci : l'argument passe de θ_0 à $\theta_0 + 2\pi$ de sorte que l'on a :

$$\int_{\text{cycle contenant O}} z^\alpha dz = \frac{1}{\alpha + 1} \rho_0^{\alpha+1} [e^{i(\alpha+1)\theta_0} - e^{i(\alpha+1)(\theta_0+2\pi)}] = \frac{\rho_0^{\alpha+1}}{\alpha + 1} e^{i(\alpha+1)\theta_0} [1 - e^{2i\alpha\pi}] \neq 0 , \tag{2.102}$$

puisque pour α non entier, $e^{2i\alpha\pi} \neq 1$. Comme on l'a déjà vu, l'origine est donc un point remarquable (singulier) : de ce point de branchement part une ligne continue de singularités, infranchissable tant que le caractère holomorphe doit être préservé, c'est une coupure. ♦

³⁹Il suffit de calculer directement l'intégrale en paramétrant le cercle.