

Claire BRANS

Myriam CORNET

Nicole COUSSAERT

Arlette DAMBREMEZ

Eveline FOREST

Liliane GUSMAN

Précis de Cinématique

U. L. B. - Atelier de physique

coordonné par G. GUSMAN

1994-1995

Les Cahiers du CeDoP

Préface

Ce texte est le résultat du travail des membres de l'atelier de physique au cours de l'année 1994-1995. Des professeurs de la Communauté française, de la Ville de Bruxelles et de l'ULB se sont réunis de nombreuses fois pour confronter leurs expériences pédagogiques, réfléchir à la didactique de leur discipline sur un point particulier, la cinématique, et finalement proposer ce texte. D'abord, il nous a semblé que notre travail devait s'articuler autour de la matière qui fait partie de celle des classes terminales du secondaire tout autant que du début de l'enseignement supérieur, universitaire et non universitaire, dans des sections où la physique est une matière enseignée en première année. C'est donc à cette période clé dans la vie d'un étudiant que nous avons pensé. Il était évident que la base de tout le cours de physique était la cinématique et que c'était là que notre effort devait porter.

Dans quel esprit devons-nous travailler ? Dès le début, nous voulions faire un texte à usages multiples. Mais, en même temps, nous ne voulions pas d'un cours. Il est en effet essentiel que chaque enseignant donne un cours adapté à sa personnalité propre tout autant qu'à la classe à laquelle il s'adresse. D'autre part, il existe suffisamment de bons livres que nous pouvons recommander. Malheureusement, ils sont souvent chers ; il faut donc choisir. De plus, ils contiennent de nombreux chapitres non nécessairement adaptés aux besoins spécifiques de la classe. C'est pourquoi nous avons opté pour un précis de cinématique.

A qui ces notes s'adressent-elles ? Aux professeurs pour qu'ils les consultent peut-être comme on consulte un dictionnaire : pour se rappeler une définition rigoureuse, pour étudier avec leurs élèves, de façon approfondie, quelques problèmes exemplaires qui ont été sélectionnés dans ce but, aussi pour leur suggérer de résoudre les autres problèmes. Mais n'oublions pas les élèves, qui peuvent utiliser cette brochure comme référence, peut-être comme un memento exempt, nous l'espérons, des fautes inévitables dues à des expressions mal recopiées du tableau noir. Pourquoi ces notes ne s'adresseraient-elles pas aux élèves qui se sont trompés, qui ont suivi un cours de physique du niveau faible et qui découvrent que beaucoup de notions, par trop rigoureuses ou techniquement exigeantes, leur font défaut ? Ce texte les aidera à compenser leur manque de formation, seuls ou éventuellement avec une aide extérieure. Pensons aussi à certains étudiants de l'enseignement supérieur, universitaire ou non, qui sont effrayés par les mots employés et surtout par le rythme rapide qui ne leur permet pas d'être à la fois attentifs pour comprendre et aptes à prendre des notes correctes et complètes. Cet abrégé peut certainement les aider pendant ces premières heures où, trop souvent, leur réussite ou leur échec se joue déjà. De toute façon, nous serons heureux de connaître les réactions suscitées parmi les élèves qui auront parcouru ces pages. Nous en tiendrons compte dans notre travail futur.

Je voudrais surtout souligner la grande joie que j'ai eue personnellement à rencontrer ces professeurs et à travailler avec eux. J'ai appris énormément à leur contact surtout en ce qui concerne ce qui est réellement ressenti comme difficile par un étudiant de première candidature. Il est parfois surprenant de constater que les vraies difficultés ne sont pas du tout là où l'enseignant croit les trouver. Peut-être la cinématique apparaîtra-t-elle un peu plus facile à certains étudiants. C'est à ces collègues du secondaire qu'ils le devront.

Je remercie mes collègues Claire Brans, Myriam Cornet, Nicole Coussaert, Arlette Dambremez, Eveline Forest et Liliane Gusman, d'avoir consacré autant d'heures de leurs loisirs à ce travail et d'être venues aussi régulièrement. Il était essentiel que nous fussions nombreux pour avoir des approches aussi variées que possible. Merci aussi à tous leurs élèves qui ont bien voulu lire le projet initial de ce texte. Leurs remarques nous ont fort aidés.

Peut-être nous retrouverons-nous l'an prochain dans un nouvel atelier afin de poursuivre cette réflexion ?

Guy GUSMAN

Table des matières

1. Introduction.....	2
2. Vecteur position.....	4
Exemple 1.....	5
3. Vecteur vitesse.....	6
3.1. Vitesse moyenne.....	6
3.2. Vitesse instantanée	7
Exemple 2.....	8
4. Vecteur accélération.....	9
4.1. Accélération moyenne.....	9
4.2. Accélération instantanée	10
Exemple 3.....	10
<i>Application pratique 1 : le mouvement circulaire uniforme</i>	11
4.3. Composantes normale et tangentielle de l'accélération.....	12
Exemple 4.....	15
Exemple 5.....	16
<i>Application pratique 2 : le saut ou tir parabolique</i>	17
5. Passage de l'accélération à la vitesse et à la position par intégration.....	20
5.1. Le mouvement rectiligne uniforme.....	21
5.2. Le mouvement rectiligne uniformément accéléré	22
<i>Application pratique 3 : la livrée d'une balle de tennis</i>	23
6. Intégration et dérivation graphiques.....	25
<i>Application pratique 4 : une balle qui rebondit</i>	26
Exercices complémentaires non résolus.....	28

1. Introduction

Le but de la cinématique est de décrire de façon quantitative le mouvement d'objets sans s'intéresser aux causes qui les produisent.

Les questions auxquelles nous allons essayer de répondre sont :

- Où se trouve un objet ?
- Bouge-t-il ? Comment, rapidement, lentement ?
Va-t-il se déplacer de plus en plus vite ? ou, au contraire, freine-t-il ?
- Où se trouvera-t-il dans quelques minutes ? etc.

mais ne seront pas :

- Pour quelle raison tourne-t-il ?
- Ou, quelle est la cause de sa chute ?

Cela reviendra à étudier systématiquement la position, la vitesse et l'accélération d'un objet en mouvement et à définir les relations qui lient ces trois grandeurs physiques.

Pour commencer, nous allons simplifier le travail en assimilant les objets dont nous décrirons le mouvement à des petites particules, des points matériels, c'est-à-dire des mobiles ponctuels qui seraient semblables à des objets réels vus de très loin, une voiture qui se déplace le long d'une route vue d'avion, par exemple. Par la suite, notre description pourra être affinée et nous pourrions nous intéresser au mouvement d'une partie de l'objet par rapport à une autre telle que la rotation des roues autour de leur axe ou celle du volant produite par le conducteur.

Nous décrirons la position et le mouvement d'un objet par rapport à d'autres objets pris comme référence tels qu'un élève par rapport à la classe, la craie par rapport au tableau, la lune par rapport à la terre ou au soleil. Comme le même objet peut être regardé par plusieurs personnes ayant des positions différentes, il faut donc préciser le système de référence ou le repère que chacun utilise.

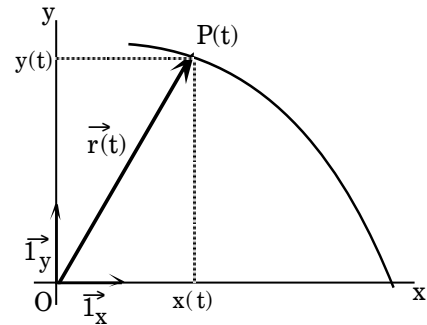
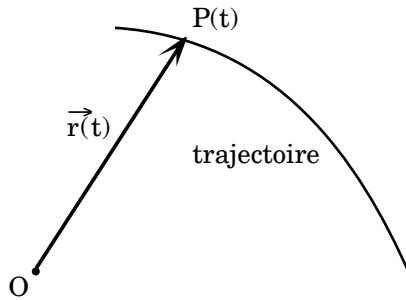
Il est bien sûr commode que les différents observateurs se servent tous de la même horloge (pour qu'ils fassent du même événement des descriptions synchrones) et du même système d'unités (pour que les dimensions d'un même objet ne varient pas suivant le repère choisi ; ces conditions sont réalisables en mécanique non relativiste où les vitesses sont très petites comparées à $3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$, la vitesse de la lumière).

De façon générale, nous travaillerons dans les unités du S.I., soit en mètres (m) pour les longueurs et en secondes (s) pour les temps, sauf si, pour des raisons de commodité, on en emploie d'autres (on dira couramment que la terre met 1 an à parcourir sa trajectoire autour du soleil plutôt que 31.10^6 s); dans ce cas, on le précisera dans l'énoncé.

Pour simplifier les dessins (sans restreindre la généralité du texte), nous allons regarder le mouvement d'un point P à deux dimensions, représenté dans le plan de l'une de ces feuilles de papier. Quand P se déplace, il passe par un ensemble de points formant une courbe appelée sa trajectoire. Nous pouvons faire d'un même mouvement une description plutôt géométrique ou plutôt algébrique. Nous présenterons ces deux points de vue équivalents en juxtaposant, à gauche une description géométrique et, à droite une étude analytique.

2. Vecteur position

Pour décrire le mouvement du point P sur cette feuille de papier, il faut choisir une origine O qui servira de point de repère.



La position de P est repérée à chaque instant par le vecteur \vec{r} tracé à partir de l'origine O. Ce vecteur \vec{r} a une valeur r (ou norme, module...), une direction (ou droite d'action) et un sens (indiqué par la flèche).

La trajectoire de P est le lieu géométrique de toutes les positions de l'extrémité de \vec{r} .

Nous avons choisi un repère orthonormé Oxy, et des vecteurs unité \vec{i}_x et \vec{i}_y sur chacun des axes. Dans ce repère, la position de P est donnée, en cm, par :

$$\vec{r} = (2, 3)$$

On peut écrire ce même vecteur de plusieurs façons différentes :

$$\vec{r} = 2 \vec{i}_x + 3 \vec{i}_y$$

ou encore sous d'autres formes telles que :

$$\vec{r} = 2 \vec{i} + 3 \vec{j} \quad \text{ou} \quad \vec{r} = 2 \vec{e}_1 + 3 \vec{e}_2$$

Si on travaille à 3 dimensions, on ajoutera une composante suivant z et on aura par exemple pour le vecteur position $\vec{r} = (2, 3, 1)$. Dans la suite, nous nous limiterons le plus souvent à deux dimensions.

D'une façon générale, la position d'un point peut être précisée à un certain instant t par un vecteur dont les composantes x et y sont données (calculées ou mesurées...) à cet instant dans un repère orthonormé Oxy :

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{ou} \quad \vec{r}(t) = x(t) \vec{i}_x + y(t) \vec{i}_y \quad \text{ou} \quad \vec{r}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} \dots$$

$x(t)$ et $y(t)$ correspondent aux coordonnées des projections du point respectivement sur les axes Ox et Oy à l'instant t considéré. Remarquons que d'autres repères sont parfois utilisés tels que la longitude et la latitude employées par les géographes et les navigateurs.

Maintenant que nous savons repérer la position d'un point, nous pouvons nous demander quelle est l'équation de la trajectoire de l'objet. Comme cette courbe géométrique est indépendante du temps (la trajectoire de la terre autour du soleil est une ellipse dont le soleil occupe un des foyers et aujourd'hui, la terre est quelque part sur cette trajectoire), il faut donc éliminer ce paramètre temps t des équations paramétriques pour trouver l'équation de la trajectoire.

EXEMPLE 1

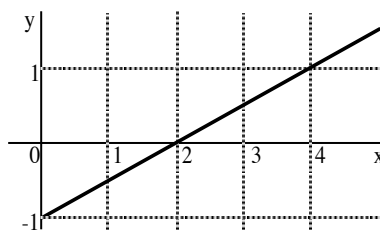
$$\vec{r}(t) = (2t^2, t^2 - 1)$$

ou sous la forme paramétrique :

$$x(t) = 2t^2 \quad \text{et} \quad y(t) = t^2 - 1$$

A partir de la première de ces équations :

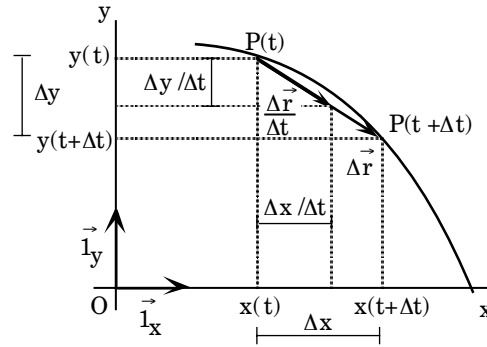
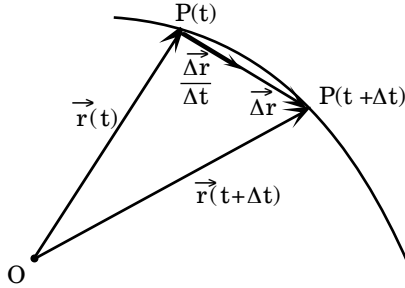
$$t^2 = \frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad y = 0,5x - 1$$



Il s'agit visiblement d'une droite, ou plus précisément d'une demi-droite puisque $t^2 \geq 0$ et donc, x n'est jamais < 0 .

3. Vecteur vitesse

3.1. Vitesse moyenne



La position de P est repérée à l'instant t par $\vec{r}(t)$, un peu plus tard, à l'instant $t + \Delta t$, elle sera indiquée par $\vec{r}(t + \Delta t)$. Si ces deux vecteurs sont différents, P s'est déplacé de $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$.

Nous pouvons nous demander si ce déplacement est important ou non par rapport à l'intervalle de temps Δt . Pour répondre à cette question, nous diviserons le déplacement $\Delta \vec{r}$ par Δt et définirons la *vitesse moyenne* au cours de cet intervalle de temps Δt , $\langle \vec{v} \rangle_{t; t+\Delta t}$, que nous écrirons $\langle \vec{v} \rangle$ afin d'alléger la notation :

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Comme on a *divisé* le vecteur $\Delta \vec{r}$ par le *scalaire* Δt , cela veut dire que l'on divise chacune des composantes de $\Delta \vec{r}$ par Δt :

$$\begin{aligned} \langle \vec{v} \rangle &= \left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right) \\ &= \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) \end{aligned}$$

qui représente la vitesse moyenne entre t et $t + \Delta t$.

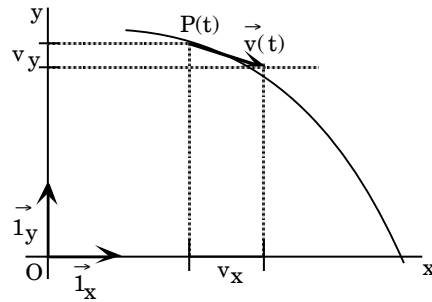
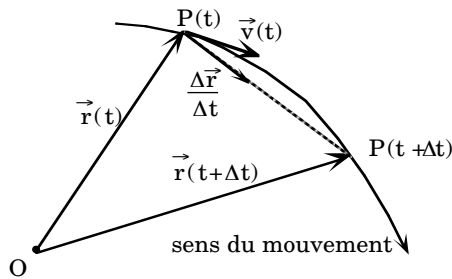
Pour la clarté du dessin ci-dessus, les vecteurs $\vec{r}(t)$ et $\vec{r}(t + \Delta t)$ n'ont pas été représentés.

3.2. Vitesse instantanée

Mais attention, si l'on regarde une voiture qui part de Bruxelles, va à Ostende et revient deux heures plus tard à son point de départ, suivant cette définition, sa vitesse moyenne au cours de ces deux heures est nulle puisque le déplacement total au bout de ces deux heures est nul alors que l'espace parcouru ne l'est pas.

Donc, il faut être prudent et prendre des intervalles de temps suffisamment petits ; du point de vue mathématique, on fera tendre Δt vers zéro ; dans ce cas, on remplace Δt par dt . Bien entendu, le déplacement tend aussi vers zéro, on l'écrit $d\vec{r}$ et il faudra calculer la limite $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ pour $\Delta t \rightarrow 0$.

C'est la *vitesse instantanée*, ou plus brièvement la *vitesse*, qui s'obtient donc en calculant la vitesse moyenne pour un intervalle de temps de plus en plus court.



Après avoir représenté \vec{r} à l'instant t , nous représentons $\vec{r} + \Delta \vec{r}$ à l'instant $t + \Delta t$. Le vecteur vitesse s'obtient en calculant le rapport entre le vecteur $\Delta \vec{r}$ et le scalaire Δt , puis en faisant tendre Δt vers 0.

Nous trouverons donc la vitesse d'un objet de vecteur position $\vec{r}(t)$ en dérivant $\vec{r}(t)$ par rapport au temps :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (v_x, v_y)$$

Mathématiquement, la vitesse instantanée se définit donc comme :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

dérivée de $\vec{r}(t)$ par rapport à t .

A l'aide du théorème de Pythagore, on peut, à partir de v_x et de v_y , calculer la valeur de la vitesse (en anglais « speed ») à l'instant t :

$$v = + \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

D'autre part, on remarque que la direction du vecteur $\Delta \vec{r}$, de sécant à la trajectoire au départ, devient progressivement *tangent* à celle-ci lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ et que son sens correspond à celui du mouvement.

ainsi que l'angle entre ce vecteur $\vec{v}(t)$ et l'un des axes ; par exemple, l'angle α entre $\vec{v}(t)$ et l'axe x se calculera à partir de sa tangente :

$$\text{tg } \alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

De même que la dérivée de y par rapport à une variable d'espace x , $\frac{dy}{dx}$, se note parfois y' , on écrit quelquefois la dérivée de la position par rapport au temps sous la

forme :
$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (\dot{x}, \dot{y})$$

La vitesse s'exprime en m s^{-1} dans le S.I. Rappelons que 1 m s^{-1} vaut $3,6 \text{ km h}^{-1}$.

EXEMPLE 2

Reprenons le problème précédent où $\vec{r}(t) = (2t^2, t^2 - 1)$.

La vitesse est donnée par : $\vec{v}(t) = (4t, 2t)$.

A titre d'exemples : $\vec{v}(-2) = (-8, -4)$ $\vec{v}(0) = (0, 0)$ et $\vec{v}(1) = (4, 2)$

Ces trois vitesses montrent que l'on décrit le mouvement d'un objet qui se dirige vers l'origine pour $t < 0$, touche l'axe des y à l'instant $t = 0$, fait demi-tour, puis repart d'où il vient pour $t > 0$.

Si l'on calcule les valeurs de ces trois mêmes vitesses, on aura :

$$v(-2) \approx 8,9 \text{ m s}^{-1} \qquad v(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad v(1) \approx 4,5 \text{ m s}^{-1}$$

4. Vecteur accélération

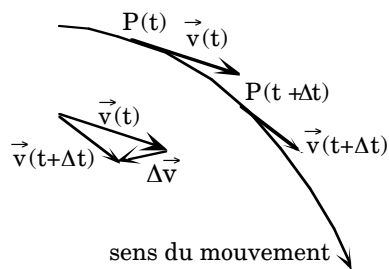
Il est important de remarquer que si $\vec{v}(t) \neq \vec{0}$, cela signifie une modification à l'instant t *d'au moins* une des trois caractéristiques du vecteur $\vec{v}(t)$, sa *direction*, son *sens* ou encore sa *valeur* $v(t)$. Nous allons refaire exactement le même type de raisonnement pour voir comment la vitesse $\vec{v}(t)$ varie au cours du temps et nous allons construire le *vecteur accélération* $\vec{a}(t)$.

4.1. Accélération moyenne

Regardons le point P en deux instants voisins, t et $t + \Delta t$. La vitesse a visiblement changé et nous voyons sur le dessin que $\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t) + \Delta \vec{v}$.

La variation relative de la vitesse au cours de l'intervalle Δt est donnée par l'accélération moyenne :

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$



D'un point de vue algébrique, ceci nous amène à définir l'accélération comme la dérivée de la vitesse et à calculer ses composantes dans le repère Oxy :

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$= \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \right)$$

$$= \left(\frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}, \frac{v_y(t + \Delta t) - v_y(t)}{\Delta t} \right)$$

Remarquons tout de suite que la direction de $\Delta \vec{v}$, c'est-à-dire celle de $\langle \vec{a} \rangle$ est différente de celles de chacun des deux vecteurs $\vec{v}(t)$ et $\vec{v}(t + \Delta t)$.

En effet, de façon générale, le vecteur $\langle \vec{a} \rangle$ n'a pas de raison d'être tangent à la trajectoire. Nous reviendrons sur ce point un peu plus loin dans le texte.

4.2. Accélération instantanée

Une fois de plus (comme précédemment), nous allons passer à la limite $\Delta t \rightarrow 0$ pour obtenir l'accélération instantanée.

Par définition :

$$\begin{aligned}\bar{a}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}(t)}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt} \right) \\ &= (a_x, a_y) = a_x \bar{i}_x + a_y \bar{i}_y = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} = \dots\end{aligned}$$

et
$$a(t) = + \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Ordre de grandeur de quelques accélérations :

démarrage d'un train : $0,3 \text{ m s}^{-2}$

démarrage d'une voiture de course : 6 m s^{-2}

chute libre au voisinage de la surface de la terre : 10 m s^{-2}

arrêt brutal d'une voiture lors d'un choc : $1\,000 \text{ m s}^{-2}$

EXEMPLE 3

En reprenant encore le problème précédent, $\bar{r}(t) = (2t^2, t^2 - 1)$, nous obtenons facilement :

$$\bar{a}(t) = (4, 2) \quad \text{et} \quad a \approx 4,5 \text{ m s}^{-2}$$

Visiblement, l'accélération est constante au cours du temps. De plus, *dans ce problème*, nous remarquons, qu'à tout instant, les deux vecteurs $\bar{a}(t)$ et $\bar{v}(t)$ ont toujours la même direction :

$$\bar{v}(0) = (0,0) = 0. \quad \bar{a}(0) = (4, 2) = 1. \quad \bar{v}(1) = (4, 2) = 1. \quad \bar{a}(1) = (4, 2) = 1. \quad \text{et} \quad \bar{v}(-2) = (-8, -4) = -2. \quad \bar{a}(-2) = (-8, -4) = -2.$$

Ceci est dû au fait que la trajectoire est rectiligne. L'accélération est tangentielle, tout comme la vitesse. Mais attention, le coefficient numérique placé devant \bar{a} n'est pas un simple nombre, il a les dimensions d'un temps !

Application pratique 1 : le mouvement circulaire uniforme

Ecrivons les équations qui décrivent ce type de mouvement dans un repère Oxy. Mettons le centre de la trajectoire *circulaire* à l'origine O. Dans ce repère, la position de P est décrite par le vecteur :

$$\vec{r} = (R \cos \theta ; R \sin \theta)$$

Nous pouvons vérifier que la trajectoire de P est bien circulaire. En effet :

$$r = \sqrt{R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta} = R = \text{rayon de la circonférence.}$$

Introduisons maintenant le *mouvement* : l'angle θ dépendra du temps et nous l'écrivons $\theta(t)$. Il ne reste plus alors qu'à préciser que le mouvement est *uniforme*. Ceci signifie que si, après un temps t , le point P a tourné d'un angle θ , 2θ seront décrits en $2t$, de façon générale $\theta \propto t$.

Si nous choisissons qu'à l'instant $t = 0$, $\theta = 0$, nous pourrions écrire $\theta = \omega t$ et notre expression de \vec{r} prend la forme :

$$\vec{r}(t) = (R \cos \omega t ; R \sin \omega t)$$

Elle décrit le mouvement d'un point qui, à $t = 0$, se trouve en $\vec{r}(0) = (R ; 0)$ et tourne à la vitesse angulaire constante $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.

La période du mouvement, temps nécessaire pour faire un tour complet, T , est constante. Il existe une relation simple entre la vitesse angulaire ω et la période T . En effet, puisque $\theta = \omega t$, après un tour complet ($t = T$ et $\theta = 2\pi$ radians), $2\pi = \omega T$, et :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Le fait que $\vec{r}(t) = \vec{r}(t + T)$, quelle que soit la valeur de t , nous rappelle que le mouvement est périodique.

[L'écriture la plus générale d'un mouvement circulaire uniforme avec $\vec{r}(0)$ quelconque sera donnée par $\vec{r}(t) = (R \cos \{\omega t + \varphi\} ; R \sin \{\omega t + \varphi\})$. Pourquoi ? φ s'appelle la phase à l'origine (du temps) et ne dépend que de l'instant où l'on a déclenché le chronomètre.]

Cherchons la vitesse : $\vec{v}(t) = (-\omega R \sin \omega t ; \omega R \cos \omega t)$

et sa valeur : $v(t) = \omega R = \text{constante}$

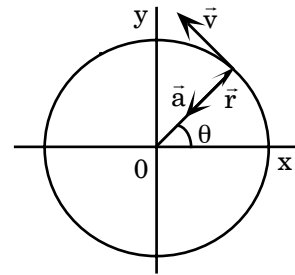
ensuite l'accélération : $\vec{a}(t) = (-\omega^2 R \cos \omega t ; -\omega^2 R \sin \omega t) = -\omega^2 \vec{r}(t)$

puis sa valeur : $a(t) = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} = \text{constante}$

Nous remarquons que :

1. Les vecteurs $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$ varient au cours du temps alors que leurs valeurs v et a sont constantes.

2. L'accélération est centripète, c'est-à-dire qu'elle est radiale (même direction que $\vec{r}(t)$ mais de sens opposé et donc dirigée vers le centre de la trajectoire).



Nous pouvons aussi vérifier que l'accélération est radiale en montrant que :

$$\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0$$

4.3. Composantes normale et tangentielle de l'accélération

L'application précédente ainsi que l'exemple 3 nous suggèrent de regarder l'accélération dans un repère très particulier, et bien utile, construit à partir de la tangente et de la normale à la trajectoire en P.

Nous voyons que l'accélération a deux composantes :

- la première, a_n , est la projection sur la normale. Comme dans le mouvement circulaire uniforme (**Application pratique 1**), elle fait tourner le vecteur \vec{v} sans en modifier la valeur.

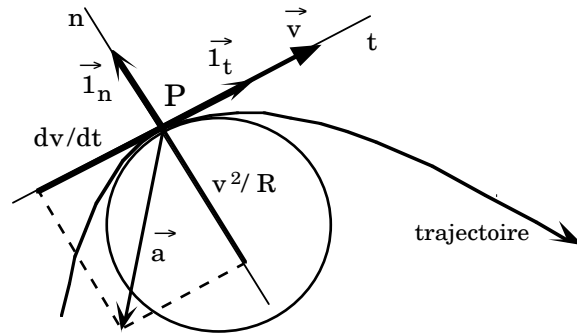
- la seconde, a_t , est la projection sur la tangente. Comme lorsque la trajectoire est rectiligne (EXEMPLE 3), elle nous apprend si la valeur de la vitesse a varié (l'objet se déplace plus ou moins vite).

Nous choisirons le sens de l'axe tangent identique à celui du mouvement et celui de la normale dirigé vers la convexité de la trajectoire.

Dans ce cas, nous avons les valeurs suivantes pour les composantes

- tangentielle : $a_t = \frac{dv}{dt}$

- normale : $a_n = -\frac{v^2}{R}$



d'où l'expression complète de \vec{a} :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{i}_t - \frac{v^2}{R} \vec{i}_n$$

Le dessin ci-dessus correspond à un objet qui ralentit.

La présence de ces deux termes peut se comprendre. Comme la vitesse est tangentielle, elle s'écrit dans ce repère :

$$\vec{v}(t) = v(t) \vec{i}_t$$

Dérivons pour trouver l'accélération :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{i}_t + v(t) \frac{d\vec{i}_t}{dt}$$

Il y a bien deux composantes. Dès maintenant, nous voyons que la composante tangentielle nous indique si l'objet va plus ou moins vite. La composante normale, par contre, nous montre si l'objet tourne.

En effet, à t' , le vecteur unité \vec{i}_t , n'a plus la même direction que \vec{i}_t tout en ayant la même longueur que lui. Une composante normale, dirigée suivant la concavité de la trajectoire, $d\vec{i}_t$ lui a été ajoutée :

$$d\vec{i}_t = -db \vec{i}_n$$

Nous avons employé la notation db pour nous rappeler qu'il s'agit d'un terme très petit (comme dx ou dt). Calculons sa valeur.

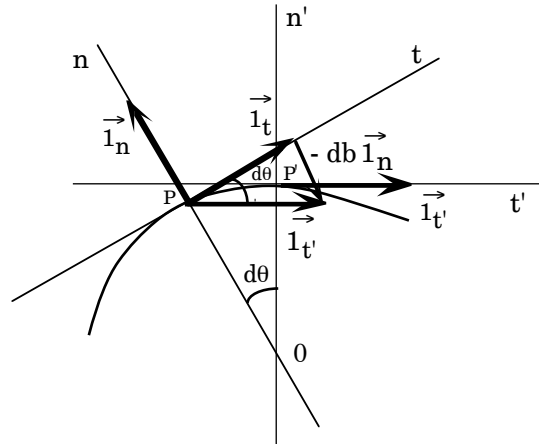
Regardons deux points très voisins, $P(t)$ et $P'(t + dt)$.

La trajectoire peut être assimilée à la circonférence tangente de rayon R et de centre O .

Appelons ds l'espace parcouru, le long de la trajectoire, de P à P' :

$$ds = R d\theta$$

où $d\theta$ est l'angle au centre (exprimé en radians).



La trigonométrie nous montre que $db / 2 = d\theta / 2 \rightarrow db = \frac{ds}{R}$

d'où :

$$\frac{d\vec{l}_t}{dt} = -\frac{1}{R} \frac{ds}{dt} \vec{l}_n$$

et comme $\frac{ds}{dt}$ est la vitesse $v(t)$, on obtient $v(t) \frac{d\vec{l}_t}{dt} = -\frac{v^2}{R} \vec{l}_n$

ce qui donne l'expression complète de l'accélération, soit $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{l}_t - \frac{v^2}{R} \vec{l}_n$

En résumé :

- La composante normale a_n (dont le sens positif est vers la convexité) indique si la trajectoire est courbe. Si cette dernière est suffisamment régulière, il y a toujours une (et une seule) circonférence qui lui est tangente. C'est le rayon R de cette circonférence qui apparaît au dénominateur. La présence de cette composante a_n implique un changement de direction de $\vec{v}(t)$.

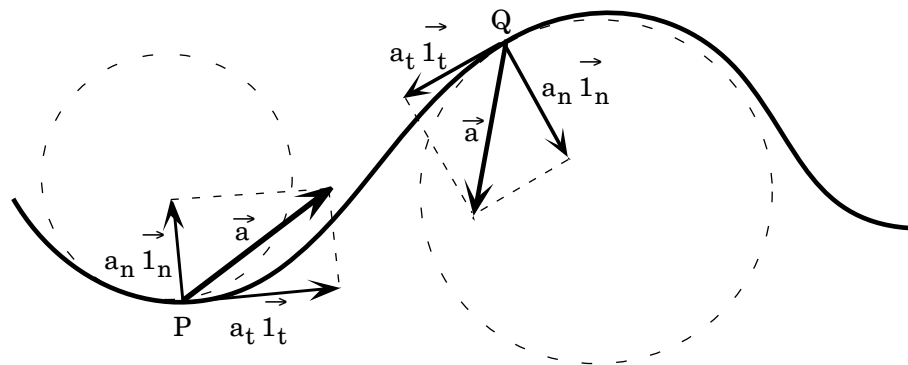
- L'autre composante tangente à la trajectoire, a_t , nous dit si la valeur de la vitesse change.

- Si, à un certain instant et dans un repère donné, un objet se déplace le long d'une droite, $R \rightarrow \infty$ et donc $a_n = 0$. Dans ce cas (seulement), $a_t = a = \frac{dv}{dt}$. On voit que ceci est strictement lié au caractère rectiligne du mouvement observé.

- D'autre part, \vec{a} est toujours orienté vers le côté concave de la trajectoire.

EXEMPLE 4

Une voiture qui gravit une côte passe d'une position où elle accélère en P à une autre position Q où elle est ralentie. Ceci est décrit par la composante tangentielle. La composante normale, par contre, permet à la voiture de suivre la courbure de la pente.



Lorsque nous sommes dans une voiture qui roule en suivant une trajectoire de forme quelconque, le tachymètre indique à peu près la valeur $v(t)$ de la vitesse instantanée de cette voiture. Lorsque l'aiguille de ce tachymètre bouge, cela montre que cette valeur varie au cours du temps et que la voiture a une accélération tangentielle $dv(t)/dt = a_t \neq 0$. Au contraire, si la voiture tourne avec une valeur de la vitesse constante (mouvement uniforme), $dv(t)/dt = 0$, l'aiguille est immobile alors qu'il y a une accélération normale ou radiale $a_n \neq 0$.

Comment peut-on donc préciser si la vitesse d'un objet augmente ?

Il faut regarder la composante tangentielle de l'accélération, $a_t = dv(t)/dt$.

Si elle est positive, alors $a_t \vec{l}_t$ a le même sens que \vec{v} et v augmente. L'angle entre \vec{a} et \vec{v} est aigu.

Dans la situation inverse, le signe de a_t est négatif, $a_t \vec{l}_t$ est de sens opposé à \vec{v} et v diminue. L'angle entre \vec{a} et \vec{v} est alors obtus.

Si nous abordons ce problème de manière analytique, nous pouvons voir que la vitesse augmente si v^2 croît, donc si $d(v^2)/dt > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Mais : } d(v^2)/dt &= d(\vec{v} \cdot \vec{v})/dt \\ &= 2 \vec{v} \cdot d\vec{v}/dt = 2 \vec{v} \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

La vitesse de l'objet augmente si

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = a_x v_x + a_y v_y > 0$$

Par contre, elle diminue si $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$.

EXEMPLE 5

Le mouvement hélicoïdal - Mouvement à 3 dimensions

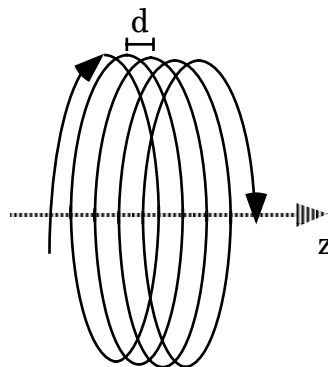
Un objet est en mouvement de rotation uniforme dans le plan Oxy. Mais regardons-le en nous éloignant du plan de rotation à partir de l'instant $t = 0$, perpendiculairement à lui suivant un axe z dont nous mettons l'origine au point O, centre de la circonférence. Il s'agit, par exemple d'un point de la tête d'une vis que l'on enfonce. Sa trajectoire nous apparaîtra comme une hélice et nous décrirons son mouvement par le vecteur position :

$$\vec{r}(t) = (R \cos \omega t ; R \sin \omega t ; v_0 t)$$

Au bout d'une période de rotation $T = 2 \pi / \omega$, il y aura eu un déplacement suivant z, l'axe de l'hélice, égal au *pas de l'hélice* donné par :

$$d = v_0 T = 2 \pi v_0 / \omega$$

Le dessin qui suit représente ce mouvement en perspective.



Ce mouvement se rencontre également lorsqu'on monte un escalier en "colimaçon" à vitesse ascensionnelle constante ou lorsqu'on enfonce un tire-bouchon. C'est aussi celui d'un électron ou de toute particule chargée qui pénètre dans un champ d'induction magnétique uniforme dirigé suivant l'axe z.

Application pratique 2 : le saut ou tir parabolique

Commençons par étudier un mouvement décrit, à partir de $t = 0$, par le vecteur :

$$\vec{r}(t) = (3t, -5t^2 + 4t)$$

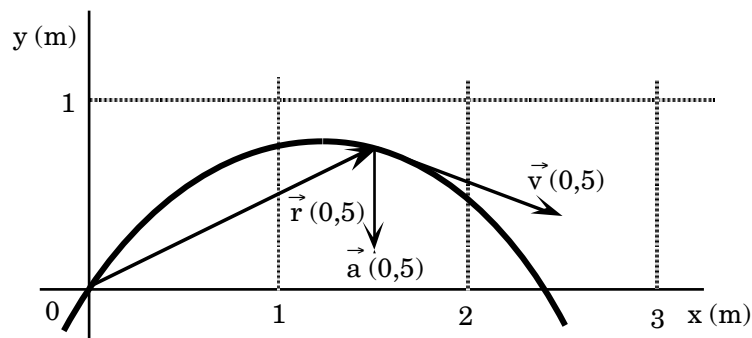
que l'on peut aussi écrire sous la forme des *équations paramétriques* :

$$\begin{aligned}x &= 3t \\y &= -5t^2 + 4t\end{aligned}$$

D'abord, cherchons la trajectoire en éliminant le temps :

$$x = 3t \rightarrow t = \frac{x}{3} \text{ que nous portons dans } y = -5t^2 + 4t \rightarrow y = -5\frac{x^2}{9} + \frac{4x}{3}$$

Cette équation décrit une parabole qui passe par l'origine des axes O, se situe dans le plan Oxy puisque $z = 0$ et décrit le jet d'un ballon par exemple, comme on le voit sur le dessin qui suit.



Calculons la vitesse du mobile $\vec{v}(t)$:
$$\vec{v}(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (3, -10t + 4)$$

Puis, par exemple, sa vitesse initiale :
$$\vec{v}(0) = (3, 4)$$

ainsi que la valeur de cette vitesse initiale :
$$v(0) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m s}^{-1}$$

Nous pouvons aussi obtenir cette valeur en calculant l'expression littérale de la vitesse, qui dépend du temps :

$$v(t) = \sqrt{3^2 + (-10t + 4)^2}$$

Puis sa valeur à $t = 0$:
$$v(0) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m s}^{-1}$$

Au bout de 0,5 s, $\vec{r}(0,5) = (1,5 ; 0,75)$ et la vitesse est donnée par $\vec{v}(0,5) = (3, -1)$

et sa valeur est de :
$$v(0,5) = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \text{ m s}^{-1} \approx 3,2 \text{ m s}^{-1}$$

On peut faire de même avec l'accélération : $\vec{a}(t) = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt} \right) = (0, -10)$ qui est constante, dirigée suivant y c'est-à-dire verticalement et vers le bas. L'objet tombe dans le champ de la pesanteur avec une accélération de 10 m s^{-2} .

Remarquons que si $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$ est correct, par contre $a \neq \frac{dv(t)}{dt}$

En fait le mouvement de l'objet correspond, horizontalement suivant x, à un mouvement rectiligne uniforme et, verticalement suivant y, à un mouvement rectiligne uniformément accéléré : l'objet se déplace uniformément horizontalement alors qu'il monte, s'arrête et finalement retombe sur le sol verticalement.

Une question intéressante est de trouver le sommet de la parabole. Pour un physicien, le sommet est le point le plus haut : cela signifie qu'en ce point la composante verticale de la vitesse s'annule, avant v_y était > 0 , après v_y est < 0 , et, au sommet, $v_y = 0$.

Donc le sommet est atteint à un temps t^* tel que $v_y(t^*) = -10 t^* + 4 = 0$, soit $t^* = 0,4 \text{ s}$.

A cet instant, l'objet se trouve au point $\vec{r}(0,4) = (1,2; -0,8 + 1,6) = (1,2; 0,8)$ et sa vitesse est $\vec{v}(0,4) = (3, 0)$, seule sa composante horizontale est $\neq 0$.

A partir de la vitesse initiale $\vec{v}(0) = (3, 4)$, on peut calculer l'angle de tir θ . En effet, comme $v_x(0) = v(0) \cos \theta$ et $v_y(0) = v(0) \sin \theta$, on peut dire que l'objet est lancé vers le haut à la vitesse de 5 m s^{-1} , suivant un angle θ avec l'horizontale qui se calcule à partir de $\text{tg } \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{4}{3}$ et vaut 53° .

Pour connaître la portée du tir, D, nous devons calculer la distance parcourue, c'est-à-dire la valeur de $x \neq 0$ telle que $y = 0$. Nous obtenons $D = 2,4 \text{ m}$.

Si nous voulons généraliser ce problème pour rendre compte de tous les lancers possibles, nous écrirons de façon littérale :

$$\vec{r}(t) = (v_x(0) t; -\frac{1}{2} a t^2 + v_y(0) t)$$

$$\vec{r}(t) = (v(0) \cos \theta t; -\frac{1}{2} a t^2 + v(0) \sin \theta t)$$

Si le tir ne s'était pas fait depuis l'origine, on aurait l'expression plus compliquée suivante :

$$\vec{r}(t) = (x(0) + v_x(0) t; y(0) + v_y(0) t - \frac{1}{2} a t^2)$$

ce qui montre qu'un bon choix du repère simplifie souvent les expressions !

Ceci nous permet maintenant d'aborder toute une série de problèmes connexes :

De quelle façon faut-il lancer une balle de golf pour que, à même valeur de la vitesse initiale, elle retombe le plus loin possible ?

Traduisons : quelle est la valeur de θ telle que la portée, $D = x(t')$, soit la plus grande possible lorsque la balle retombe sur le sol ? A ce moment, la hauteur de la balle $y(t')$ est à nouveau nulle (elle l'était au départ, à $t_0 = 0$).

$$y(t) = -\frac{1}{2} a t^2 + v(0) \sin \theta t = 0$$

$$\rightarrow t_0 = 0 \text{ et } t' = \frac{2 v(0) \sin \theta}{a}$$

Au bout de ce temps, le déplacement horizontal D vaut :

$$D = x(t') = v(0) \cos \theta t' = \frac{2 v(0)^2 \sin \theta \cos \theta}{a} = \frac{v(0)^2 \sin 2\theta}{a}$$

Si l'on veut que D soit le plus grand possible, il faut chercher les extrema de la fonction $D(\theta)$:

$$\frac{dD}{d\theta} = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = 45^\circ$$

C'est effectivement ce qui se passe lorsque l'on peut négliger les frottements entre la balle et l'air.

Nous pouvons également nous demander sous quel angle il faut lancer la balle pour atteindre le point le plus haut possible. Dans ce cas, la réponse que l'on peut obtenir par un calcul similaire au précédent est évidemment $\theta = 90^\circ$.

5. Passage de l'accélération à la vitesse et à la position par intégration

Nous avons appris à calculer, *en dérivant*, $\bar{v}(t)$ et $\bar{a}(t)$ à partir de $\bar{r}(t)$:

$$\bar{v}(t) = \frac{d\bar{r}(t)}{dt} \quad \text{et} \quad \bar{a}(t) = \frac{d\bar{v}(t)}{dt}$$

Souvent, c'est le problème inverse qui se pose. En effet, Newton a montré que c'est l'accélération qui se déduit des forces physiques qui s'appliquent aux différents objets dont on veut décrire le mouvement. Il faut donc généralement *remonter* de $\bar{a}(t)$ vers $\bar{v}(t)$ et ensuite de $\bar{v}(t)$ vers $\bar{r}(t)$. Au lieu de dériver des fonctions, nous devons procéder à l'opération inverse, c'est-à-dire *intégrer*.

Comme $\bar{v}(t) = \frac{d\bar{r}(t)}{dt}$, nous pouvons aussi écrire cette expression sous la forme :

$$d\bar{r}(t) = \bar{v}(t) dt$$

ce qui se lit : « Le déplacement d'un objet pendant l'intervalle de temps dt est donné par le produit de sa vitesse par cet intervalle de temps ». En effet, comme dt est tout petit, la vitesse peut être considérée comme constante pendant cet intervalle. En fait, cette équation en cache deux, à 2 dimensions (ou trois, à 3 dimensions) :

$$dx(t) = v_x(t) dt \quad \text{et} \quad dy(t) = v_y(t) dt$$

Le déplacement ne suffit pas pour connaître la position de l'objet ; il faut évidemment savoir d'où il part, c'est-à-dire sa position juste avant ce déplacement.

Regardons la logique du calcul :

$$\text{à } t_0 = 0 \quad \text{on est en} \quad x(0)$$

$$\text{à } t_1 = dt \quad x(dt) = x(0) + dx = x(0) + v_x(0) dt$$

$$\begin{aligned} \text{à } t_2 = 2 dt \quad x(2 dt) &= x(dt) + dx = x(dt) + v_x(dt) dt \\ &= x(0) + v_x(0) dt + v_x(dt) dt \end{aligned}$$

.....

$$\text{à } t_n = n dt \quad x(n dt) = x(0) + v_x(0) dt + v_x(dt) dt + \dots + v_x(\{n-1\} dt) dt$$

Ce que nous venons de construire est la somme des petits déplacements élémentaires, c'est-à-dire l'intégrale de la vitesse depuis l'instant de départ jusqu'à l'instant final :

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t) dt$$

[Si l'instant initial est t_0 et non $t = 0$, nous écrivons : $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(t) dt$]

Nous avons les mêmes expressions pour $y(t)$ et éventuellement $z(t)$.

Et si l'on nous donne seulement l'accélération ? Nous allons alors procéder exactement comme on l'a fait ci-dessus à partir de la vitesse. Nous intégrerons l'accélération pour obtenir la vitesse $\bar{v}(t)$, connaissant une vitesse $\bar{v}(t_0)$. Ensuite, connaissant également $\bar{r}(t_0)$, nous intégrerons encore une fois cette vitesse $\bar{v}(t)$ pour obtenir $\bar{r}(t)$. Ces données $\bar{v}(t_0)$ et $\bar{r}(t_0)$ apparaissent comme des constantes d'intégration.

Commençons par appliquer notre technique à deux types de mouvements simples :

5.1. Le mouvement rectiligne uniforme (ou MRU)

Dans ce cas, la valeur de la vitesse est indépendante du temps, l'accélération a_x est nulle, et la solution de :

$$x(t_2) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v_x dt = x(t_1) + v_x \int_{t_1}^{t_2} dt$$

est simplement

$$x(t_2) = x(t_1) + v_x (t_2 - t_1)$$

Si nous avons choisi t_1 comme instant initial, soit $t_1 = 0$, et t_2 comme l'instant t auquel nous désirons connaître la position de l'objet, l'expression précédente s'écrit :

$$x(t) = x(0) + v_x t$$

5.2. Le mouvement rectiligne uniformément accéléré (ou MRUA)

Dans cette situation, l'accélération est non nulle mais indépendante du temps.

Nous avons :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

que nous pouvons écrire

$$dv_x = a_x dt$$

et intégrer :

$$\int_{v_x(0)}^{v_x(t)} dv_x = v_x(t) - v_x(0) = \int_0^t a_x dt = a_x \int_0^t dt$$

parce que a_x ne dépend pas du temps, l'intégrale est donc simple et l'on obtient :

$$v_x(t) - v_x(0) = a_x t$$

ou

$$v_x(t) = v_x(0) + a_x t$$

Pour obtenir la position $x(t)$, il faut intégrer $v_x(t)$ et, de plus, connaître la position initiale $x(0)$ de l'objet (il s'agit de la constante d'intégration). Remplaçons $v_x(t)$ par $\frac{dx}{dt}$ dans l'équation précédente :

$$\frac{dx}{dt} = v_x(0) + a_x t$$

En multipliant les deux membres par dt , nous obtenons :

$$dx = (v_x(0) + a_x t) dt$$

que nous pouvons intégrer parce que le membre de gauche ne dépend que de la position et celui de droite uniquement du temps :

$$\int_{x(0)}^{x(t)} dx = \int_0^t v_x(0) dt + \int_0^t a_x t dt = v_x(0) \int_0^t dt + a_x \int_0^t t dt$$

$$x(t) - x(0) = v_x(0) t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

finalement :

$$x(t) = x(0) + v_x(0) t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Application pratique 3 : la livrée d'une balle de tennis

Un joueur livre une balle, à $t = 0$, à la vitesse initiale $\vec{v}(0) = (14 \text{ m s}^{-1} ; 0 ; 5 \text{ m s}^{-1})$, soit une composante horizontale $v_x(0) = 14 \text{ m s}^{-1}$ et verticale $v_z(0) = 5 \text{ m s}^{-1}$. Nous avons choisi un repère dont l'axe Ox est oblique par rapport aux bords du court afin de simplifier les calculs. La balle est livrée depuis un coin du terrain, à 2 mètres au-dessus du sol où nous avons mis l'origine du repère, ce qui se traduit par $\vec{r}(0) = (0 ; 0 ; 2)$. Elle est soumise à l'accélération de la pesanteur $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ verticale et dirigée vers le bas, $\vec{a}(t) = (0 ; 0 ; -10 \text{ m s}^{-2})$. Dans la suite, nous omettrons d'écrire de façon explicite les unités qui sont toujours données dans le SI.

Quelles sont la vitesse et la position à l'instant t ?

1ère étape, la vitesse :

$$\begin{array}{l} v_x(t) = 14 + \int_0^t a_x(t) dt \\ = 14 + 0 \\ = 14 \end{array} \quad \begin{array}{l} v_y(t) = 0 + \int_0^t a_y(t) dt \\ = 0 + 0 \\ = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} v_z(t) = 5 + \int_0^t a_z(t) dt \\ = 5 - \int_0^t 10 dt \\ = 5 - 10 t \end{array}$$

Le vecteur vitesse est donc donné par $\vec{v}(t) = (14 ; 0 ; 5 - 10 t)$

2ème étape, la position :

$$\begin{array}{l} x(t) = x(0) + \int_0^t v_x(t) dt \\ = 0 + \int_0^t 14 dt \\ = 14 t \end{array} \quad \begin{array}{l} y(t) = y(0) + \int_0^t v_y(t) dt \\ = 0 + 0 \\ = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} z(t) = z(0) + \int_0^t v_z(t) dt \\ = 2 + \int_0^t (5 - 10 t) dt \\ = 2 + 5 t - 5 t^2 \end{array}$$

La position est donnée par $\vec{r}(t) = (14 t ; 0 ; 2 + 5 t - 5 t^2)$

Nous pouvons, par exemple, nous demander quelles sont la vitesse et la position de la balle au bout de 0,5 s : $\vec{v}(0,5) = (14 ; 0 ; 0) \rightarrow v(0,5) = 14 \text{ m s}^{-1}$

et $\vec{r}(0,5) = (7 ; 0 ; 3,25)$

→ la balle a parcouru 7 mètres horizontalement et se trouve 1,25 mètres plus haut que l'endroit d'où le lancer a été effectué.

On peut vérifier que, si le joueur adverse ne rattrape pas la balle, elle retombe sur le sol au bout de 1,3 secondes environ et à 18,2 mètres horizontalement de l'endroit d'où le lancer a été effectué.

6. Intégration et dérivation graphiques

Remarquons que l'expression qui est à l'origine de l'intégrale et qui correspond au déplacement de l'objet depuis t_1 jusqu'à t_2 , peut être évaluée graphiquement.

A titre d'exemple, décomposons l'intervalle $t_2 - t_1$ en trois parties ou *pas d'intégration* ; nous aurons :

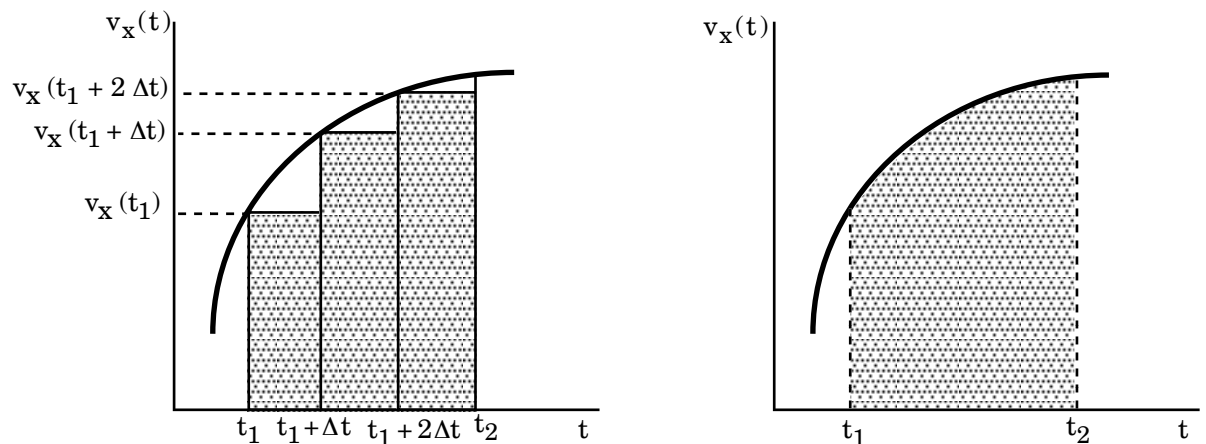
$$x(t_2) = x(t_1) + v_x(t_1) \Delta t + v_x(t_1 + \Delta t) \Delta t + v_x(t_1 + 2 \Delta t) \Delta t$$

qui peut être évaluée à partir de la surface hachurée sur la figure de gauche ci-dessous, ce qui nous permet d'aborder le problème de l'intégration sous forme graphique lorsque la vitesse est donnée par une courbe dont on ne connaît pas forcément l'équation.

Nous pouvons améliorer le résultat en divisant ce même intervalle en n parties, cela donnera :

$$x(t_1 + n \Delta t) = x(t_1) + v_x(t_1) \Delta t + v_x(t_1 + \Delta t) \Delta t + \dots + v_x(t_1 + \{n-1\} \Delta t) \Delta t$$

L'aire de la partie non hachurée qui se trouve en dessous de la courbe $v(t)$ tend vers zéro comme Δt . L'intégrale, peut être évaluée en mesurant la surface totale comprise entre la courbe $v(t)$, l'axe du temps, et les perpendiculaires à cet axe aux instants t_1 et t_2 comme on le voit sur la figure de droite.



L'intégration graphique est, très souvent, la seule possibilité d'estimer l'intégrale d'une fonction. Il est fréquent, en effet, qu'une grandeur ne soit mesurée, au laboratoire par exemple, qu'à certains instants seulement et que donc sa dépendance exacte, au sens mathématique du mot, vis-à-vis du temps ne soit pas connue.

Il en est de même pour la dérivée. A partir de la figure de gauche, on peut évaluer l'accélération moyenne entre $t_1 + \Delta t$ et $t_1 + 2 \Delta t$ par exemple. Elle vaut (voir cours de mathématique) :

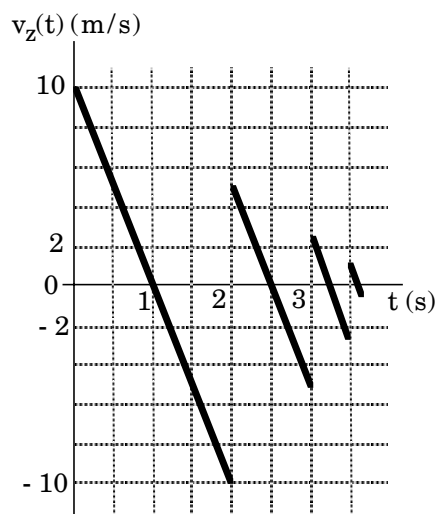
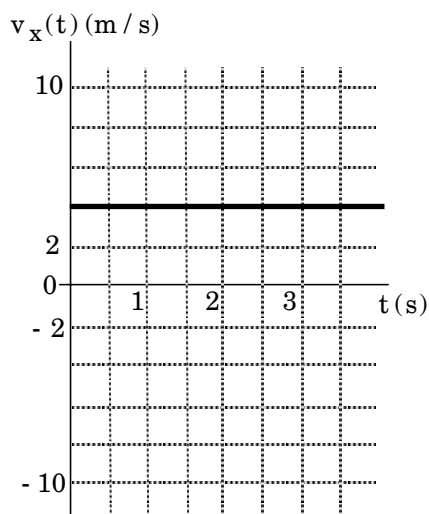
$$\langle a_x \rangle = \frac{v_x(t_1 + 2 \Delta t) - v_x(t_1 + \Delta t)}{\Delta t}$$

Application pratique 4 : une balle qui rebondit

Un enfant joue à la balle. La balle est lancée en l'air d'un coup de pied ; ensuite, elle retombe sur le sol où elle rebondit quelques fois. Les graphiques ci-dessous représentent les composantes horizontale, $v_x(t)$, et verticale, $v_z(t)$, de la vitesse de cette balle au cours du temps. A l'instant initial $t = 0$, la distance de la balle au pied du joueur est $x(0) = 0$ et, d'autre part, à $t = 1$ s, la hauteur de la balle est donnée par $z(1) = 5$ m.

Compléter les graphiques ci-dessous (courbes, unités, échelles des ordonnées) en y représentant, pour $0 \text{ s} \leq t \leq 3,5 \text{ s}$ les composantes de

- son accélération $a_z(t)$,
- sa position $z(t)$.

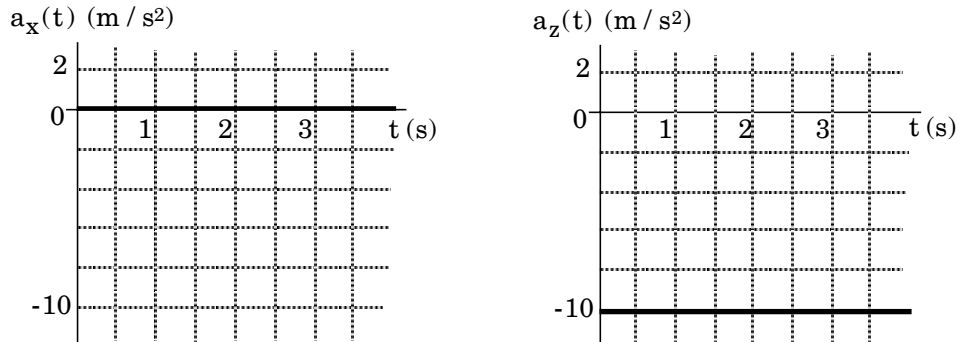


1. Calculons, à titre d'exemple, la valeur de $a_z(t)$ entre 1 et 2 s :

$$\langle a_z(t) \rangle = \frac{v_z(2) - v_z(1)}{2 - 1} = \frac{-10 - 0}{1} = -10 \text{ m s}^{-2}.$$

On vérifie que l'accélération $a_z(t)$ est constante dans tout l'intervalle de temps $0 \text{ s} \leq t \leq 3,5 \text{ s}$. De même, $a_x(t) = 0 \text{ m s}^{-2}$ pour $0 \text{ s} \leq t \leq 3,5 \text{ s}$.

Nous pouvons représenter graphiquement ces deux composantes comme suit :



2. Le déplacement *vertical* de la balle au bout de la première seconde est donné par la surface du triangle de hauteur 10 m et de base 1 s, soit $1/2 \cdot 10 \text{ m s}^{-1} \cdot 1 \text{ s} = 5 \text{ m}$.

Comme on donne $z(1)$, et que $z(1) = z(0) + 5 \text{ m}$

$$\rightarrow z(0) = z(1) - 5 \text{ m} = 5 \text{ m} - 5 \text{ m} = 0 \text{ m}.$$

La hauteur de la balle à $t = 0$ vaut $z(0) = 0 \text{ m}$. De même,

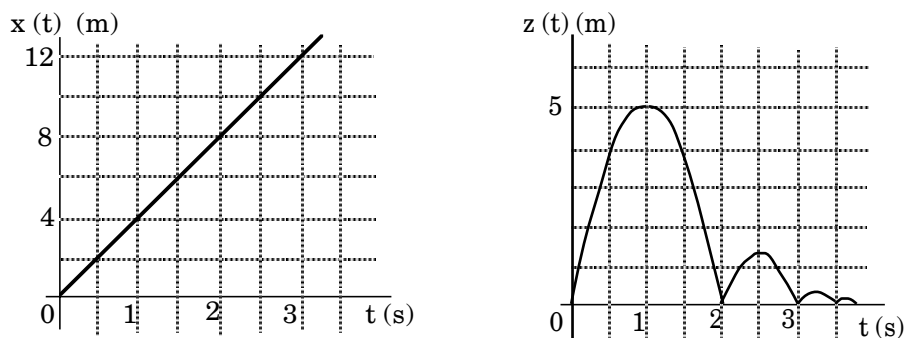
$$z(2) = z(1) + 1/2 \cdot (-10 \text{ m s}^{-1}) \cdot 1 \text{ s} = 5 \text{ m} - 5 \text{ m} = 0 \text{ m}.$$

Les autres points s'obtiennent de la même façon.

3. *Horizontalement*, le déplacement de la balle au bout de la première seconde est donné par la surface du rectangle de hauteur 4 m et de base 1 s, soit :

$$4 \text{ m s}^{-1} \cdot 1 \text{ s} = 4 \text{ m} \rightarrow x(1) = x(0) + 4 \text{ m} = 0 + 4 \text{ m} \rightarrow x(1) = 4 \text{ m}.$$

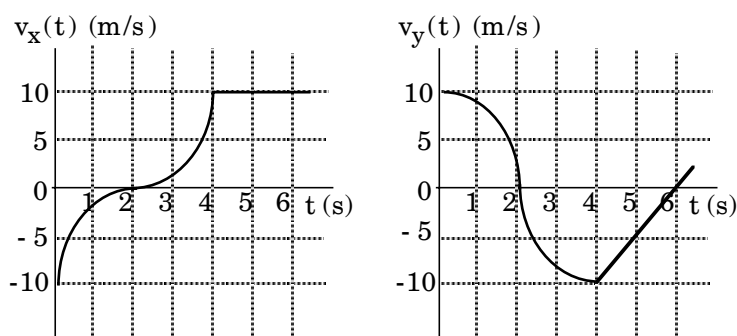
De même $x(2) = x(1) + 4 \text{ m s}^{-1} \cdot 1 \text{ s} = 4 \text{ m} + 4 \text{ m} = 8 \text{ m}$, et ainsi de suite.



$z(t)$ est une fonction quadratique de t (intégrale d'une fonction linéaire), sa représentation graphique correspond à une série de paraboles.

Exercices complémentaires non résolus

1. Un mobile se déplace dans un plan Oxy. Les composantes de la vitesse sont données sur les graphiques ci-dessous :



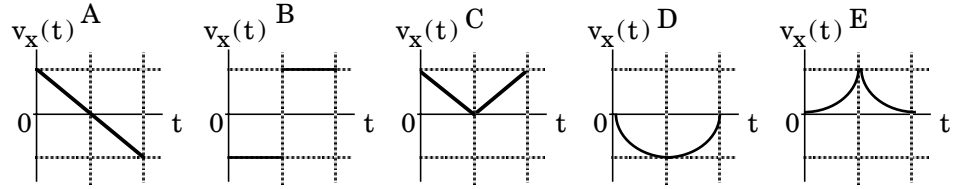
Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont exactes ?

- Pour $0 \text{ s} < t < 2 \text{ s}$, la projection de l'accélération sur Oy est > 0
- Pour $t = 2 \text{ s}$, l'accélération est nulle
- Pour $4 \text{ s} < t < 5 \text{ s}$, le vecteur accélération est parallèle à Oy
- Pour $4 \text{ s} < t < 6 \text{ s}$, l'abscisse $x(t)$ du mobile est constante
- A $t = 4 \text{ s}$, le mobile a la même position qu'en $t = 0 \text{ s}$
- Pour $4 \text{ s} < t < 6 \text{ s}$, la trajectoire est une parabole
- Pour $0 \text{ s} < t < 2 \text{ s}$, la projection de la position du mobile sur l'axe Oy se déplace vers les $y < 0$

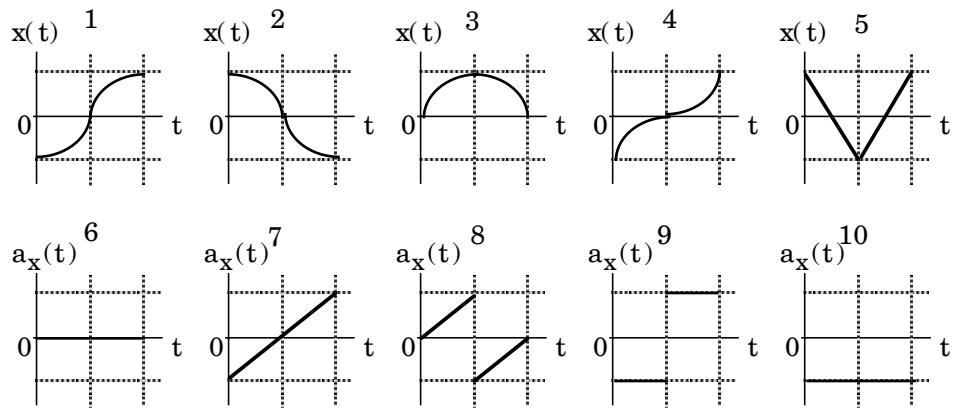
Ecrire, à l'instant $t = 5 \text{ s}$,

- les valeurs de la vitesse et de l'accélération
- les angles respectifs entre les vecteurs vitesse et accélération et l'axe Ox
- les valeurs des accélérations tangentielle et normale ainsi que le rayon de courbure de la circonférence tangente à la trajectoire.
(Cette dernière question peut vous sembler très difficile !)

2. Les cinq graphiques suivants représentent la composante $v_x(t)$ de la vitesse d'un objet.



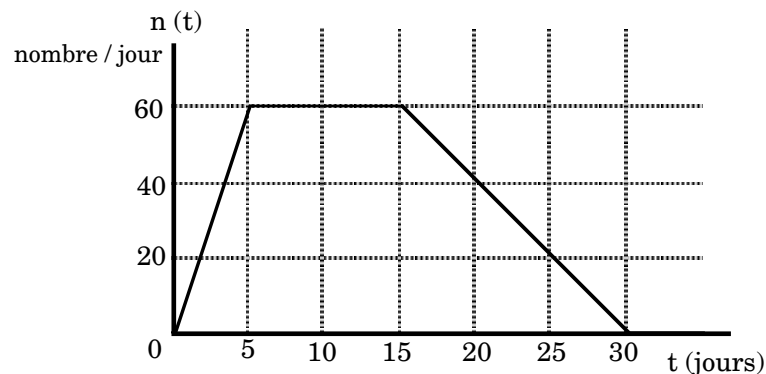
Mettre chacun des graphiques $v_x(t)$ ci-dessus en rapport avec les graphiques de $x(t)$ et de $a_x(t)$, ci-dessous, qui lui correspondent.



On peut souvent établir une correspondance entre $x(t)$, $v_x(t)$ et $a_x(t)$ en cinématique et d'autres grandeurs dans des domaines très variés. L'exercice qui suit en est une illustration.

3. Un biologiste étudie le taux de croissance (c'est l'analogie de la vitesse en cinématique) de fécondation des fleurs d'une espèce par des abeilles sur un terrain. Il note régulièrement les valeurs numériques du nombre de fleurs fécondées par jour. Cette grandeur est représentée par la fonction continue $n(t)$. Au début, les premières fleurs éclosent et attirent de plus en plus d'abeilles ; $n(t)$ croît de manière linéaire. Après cette période initiale, toutes les abeilles participent à la fécondation et $n(t)$ reste constante. Finalement, il y a de moins en moins de fleurs nouvelles et donc $n(t)$ décroît jusqu'à la valeur zéro, au moment où toutes les fleurs ont été fécondées.

Le graphique ci-dessous représente $n(t)$, le nombre de fleurs fécondées par jour, en fonction de t , en jours.



- Dessiner $g(t) = \frac{dn(t)}{dt}$.

- Représenter ensuite la fonction $N(t) = \int_0^t n(t') dt'$ qui correspond au nombre

total de fleurs fécondées à l'instant t et déterminer, par exemple, le nombre de fleurs fécondées à la fin du vingtième jour, soit $N(20)$.

Dans les problèmes qui suivent, négliger les frottements avec l'air.

4. Un projectile est lancé à la vitesse de 10 m s^{-1} successivement sous deux angles de tir 35° et 55° . Chercher la portée et le temps de vol pour chacun des tirs.

5. Une boule de neige est lancée d'une hauteur de $1,8 \text{ m}$ au-dessus du sol, avec une vitesse initiale de 10 m s^{-1} dans une direction faisant un angle de 30° au-dessus de l'horizontale. Chercher les composantes des vecteurs position et vitesse de la balle après 1 seconde. Pendant combien de temps la balle restera-t-elle en l'air ? Quelle sera sa portée ?

6. Au cours d'un saut, un skieur quitte le tremplin suivant une direction formant un angle de 20° au-dessus de l'horizontale. Il met 3 s pour retomber en un point situé 15 m plus bas que son point d'envol. Chercher les composantes de sa vitesse au moment du décollage.

7. Une grenouille qui se donne une vitesse initiale v_0 veut sauter, en terrain plat, le plus loin possible. Sous quel angle doit-elle décoller du sol ?

8. Un chat veut sauter sur le rebord d'une fenêtre. Elle se trouve à une distance horizontale D de lui et à une hauteur H par rapport au sol. Il veut se lancer avec la vitesse initiale la plus petite possible. Sous quel angle va-t-il sauter ?

9. Un cascadeur à moto décolle d'une rampe inclinée à 30° au-dessus de l'horizontale. Il arrive à sauter au-dessus d'un ensemble de véhicules qui occupe une longueur de 20 m et retombe à la hauteur de son point de départ. Chercher les composantes de sa vitesse initiale.