

## Chapitre 9

# Équations différentielles. Introduction aux fonctions de Green

“Young men should prove theorems,  
old men should write books.”  
(Godfrey Harold HARDY, 1877–1947)

*Il s'agit d'une part de rappeler des résultats concernant les équations différentielles, d'autre part de profiter d'un cadre familier pour introduire la notion de fonction de Green.*

L'objectif de ce chapitre est de profiter d'un contexte en principe assez familier (les équations différentielles linéaires) pour introduire la notion de *fonction de Green*, dont l'usage est très fréquent et très utile en Physique, surtout lorsqu'il s'agit d'équations aux dérivées partielles. Par ailleurs, la brève discussion autour des équations différentielles est aussi l'occasion de dire quelques mots sur leurs pendants discrets, les équations aux différences, qui apparaissent si souvent en Physique.

### 9.1 Généralités et définitions

Soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$  dans  $f(\mathcal{D}) \subseteq \mathbb{C}$ , munies de toutes les dérivées  $f', f'', \dots, f^{(m)}$  souhaitables<sup>1</sup>. On appelle *équation différentielle* une relation entre  $f$  et certaines de ses dérivées satisfaite pour toutes les valeurs de la variable  $z$  (réelle ou complexe) où la fonction et ses dérivées sont définies. Formellement, une telle relation s'écrit toujours :

$$\Phi(z, f, f', \dots, f^{(m)}, \dots) = 0 \quad \forall z \in \mathcal{D} , \quad (9.1)$$

où  $f^{(m)} = \frac{d^m f}{dz^m}$ . Ainsi, les équations suivantes :

$$z^5 f'' + \frac{1}{z} f' + f = \pi , \quad z f' - 3f^2 = 0 , \quad f^{(4)} f^2 + 3 \sin z f = 0 , \quad f' + e^{f(z)} = 0 \dots \quad (9.2)$$

sont des équations différentielles.

La fonction  $f$  et la variable  $z$  sont *a priori* des quantités complexes, ce qui suppose implicitement que  $f$  est une fonction analytique ; en effet, dans le cas contraire, on ne saurait pas ce que signifie  $f'(z)$  ! Il est tout à fait loisible de se restreindre au champ réel, en ne considérant qu'une variable réelle  $x$ , et une fonction  $f(x)$  à valeurs réelles. Ce faisant, en un sens, on peut paradoxalement considérer des équations plus générales, dans la mesure où on ne sait pas toujours les prolonger à vue dans  $\mathbb{C}$ . Par exemple, l'équation différentielle réelle

<sup>1</sup>  $f$  peut aussi être à valeurs réelles. Si  $f$  est une fonction analytique, on sait qu'alors elle est infiniment dérivable.

$f'(x) + |x| = 0$  ne peut recevoir de sens si on choisit  $x$  dans  $\mathbb{C}$  ; en effet, la fonction  $|z|$  n'est pas holomorphe, donc la "dérivée"  $f'$ , égale à  $-|x|$  d'après l'équation considérée, n'est pas définie. D'ailleurs, on sait que les fonctions analytiques sont des objets remarquables et robustes : forcément, les équations différentielles mettant en jeu de telles fonctions sont elles-mêmes remarquables et ne peuvent prétendre à une forme d'universalité. Dans la suite, sauf exception dûment mentionnée, les équations différentielles étudiées porteront sur des fonctions analytiques dans un certain domaine  $\mathcal{D}$ . Les exemples donnés en (9.2) sont bien de cette espèce – notamment, toutes les fonctions jouant le rôle de coefficients sont analytiques, sauf en leurs points singuliers (isolés).

L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre de la plus haute dérivée  $y$  figurant explicitement. Les équations différentielles (9.2) sont respectivement d'ordre deux, un, quatre et un.

Il existe une variété infinie d'équations différentielles, ce qui incite à effectuer une classification permettant d'énoncer des théorèmes dont la validité repose sur certains traits caractéristiques de ces équations. La classification fondamentale distingue deux grandes espèces :

1. les équations *linéaires*, caractérisées par le fait que la fonction inconnue et ses dérivées apparaissent au plus à la puissance un (en particulier, une équation linéaire ne contient pas de termes du genre  $f^p$ ,  $ff'$ ,  $f^{(n)}f^{(m)}$ , ni de fonctions  $\alpha(f)$ , etc). Une propriété fondamentale des équations linéaires est la suivante : si  $\phi(z)$  et  $\psi(z)$  sont deux solutions, alors toute combinaison linéaire  $\alpha\phi(z) + \beta\psi(z)$  ( $\alpha$  et  $\beta$  constantes quelconques) est aussi solution.

En outre, il est d'usage de distinguer les équations *homogènes*, où  $f$  et ses dérivées figurent dans tous les termes à la puissance un, les équations *inhomogènes* où figure un terme additif indépendant de  $f$  et de ses dérivées. Ainsi, les équations :

$$f'' + \frac{1}{z^2}f' + f = 0 \quad , \quad f^{(3)} + f = 0 \tag{9.3}$$

sont des équations linéaires et homogènes, alors que :

$$f^{(6)} + e^z f' + f - \ln z = 0 \tag{9.4}$$

est une équation linéaire inhomogène. Souvent, on place au second membre le terme indépendant de  $f$ , justifiant les appellations traditionnelles *équation avec ou sans second membre*, parfois commodes mais au fond sans grande utilité. Dans le cas homogène, si  $f$  est une solution, alors  $\lambda f$  est encore solution,  $\lambda$  étant un nombre quelconque.

Au total, une équation différentielle linéaire d'ordre  $N$  est toujours plus précisément de la forme :

$$\sum_{n=0}^N a_n(z)f^{(n)}(z) = \phi(z) \quad (a_N \neq 0) ; \tag{9.5}$$

les coefficients  $a_n$  sont *a priori* des fonctions de  $z$ , le cas extrême étant celui où ce sont de simples constantes (on parle alors d'équation à coefficients constants) ; la fonction  $\phi$  est donnée (on l'appelle souvent *source*) ; l'équation devient homogène si  $\phi = 0$ . Pour la référence ultérieure, notons que (9.5) peut s'écrire formellement comme suit :

$$\hat{L}f = \phi \tag{9.6}$$

où  $\hat{L}$  désigne l'opérateur différentiel :

$$\hat{L}(z) = \sum_{n=0}^N a_n(z) \frac{d^n}{dz^n} \tag{9.7}$$

2. les équations *non-linéaires*, caractérisées par le fait que la fonction inconnue et ses dérivées apparaissent dans des monômes  $(f^{(n)})^\lambda (f^{(m)})^\mu \dots$ , ou dans des fonctions, sans aucune restriction. Les équations suivantes sont non-linéaires :

$$z^5(f'')^2 + \frac{1}{z}f' + f = \pi \quad , \quad \ln(f') - 5f = 0 \quad , \quad f'f^{(4)} + \frac{3}{f^2} \cosh z = z \quad . \tag{9.8}$$

Il est bien clair que rien ne bride l'imagination quand il s'agit de donner un exemple d'équation non-linéaire...

La distinction linéaire – non-linéaire est absolument fondamentale. Pour des équations linéaires, on sait que l'ensemble des solutions peut être muni d'une structure d'espace vectoriel, ce qui permet d'énoncer de nombreux théorèmes concernant notamment l'existence et l'unicité des solutions. Pour les équations non-linéaires, la situation est nettement plus difficile, moins confortable, parfois même un peu acrobatique.

Ces deux types d'équations se rattachent à des mondes très différents. On peut dire que les équations linéaires décrivent des phénomènes très banals, ne conduisant à aucune vraie surprise. Au contraire, les équations non-linéaires contiennent une richesse incommensurable, et engendrent parfois des solutions exotiques, présentant de surcroît une extrême variabilité par rapport à des changements *a priori* anodins, voire infimes. On rencontrera quelques exemples dans la suite, mais il est utile de marquer dès maintenant la différence spectaculaire sur un premier exemple très simple.

L'équation linéaire :

$$f' + \frac{f}{z-1} = 0 \quad (9.9)$$

a pour solution<sup>2</sup>  $f(z) = \frac{A}{1-z}$ , où la constante d'intégration  $A$  se détermine grâce à une condition supplémentaire (prescrite à l'avance – voir plus loin, section 9.2), par exemple la valeur de  $f$  en un point, pourquoi pas  $f(0)$  – alors  $A = f(0)$  et la solution est :

$$f(z) = \frac{f(0)}{1-z} = \frac{1}{1-z} \quad \text{si } f(0) = 1 ; \quad (9.10)$$

noter que le facteur  $A = f(0)$  ne change en rien la nature de la solution, et notamment n'affecte pas ses singularités, ici un unique pôle simple en  $z = 1$  – la simple vision de l'équation (9.9) permet d'ailleurs de deviner que  $z = 1$  est un point particulier, où il se passe quelque chose de remarquable.

Par contraste, soit l'équation non-linéaire :

$$f' = f^2 \quad (9.11)$$

dont la solution générale est  $f(z) = \frac{1}{C-z}$ ,  $C$  étant la constante d'intégration. À nouveau, en prescrivant d'avance la valeur de  $f$  en  $z = 0$ , on a  $f(0) = \frac{1}{C}$ , d'où la solution dans ces conditions :

$$f(z) = \frac{f(0)}{1-zf(0)} = \frac{1}{1-z} \quad \text{si } f(0) = 1 . \quad (9.12)$$

Ainsi, en prenant  $f(0) = 1$  dans les deux cas, les deux équations (9.9) et (9.11) ont exactement la même solution – et pourtant, la considération de (9.11) ne permet nullement de soupçonner que  $z = 1$  est un point remarquable : un pôle apparaît spontanément dans la solution, que l'on aurait pas deviné en regardant l'équation (c'est pourquoi on parle de *singularité spontanée*<sup>3</sup>). Choisissons une autre condition initiale, par exemple  $f(0) = 2$  ; la solution de (9.11) est alors  $\frac{2}{1-2z}$  : elle a encore un pôle, mais il est maintenant en  $z = \frac{1}{2}$  ! Ce simple changement de condition initiale a profondément modifié la solution<sup>4</sup>...

D'une façon générale, pour une équation linéaire du premier ordre  $f' = \Phi(f, z)$ , avec la condition  $f(a) = A$ , la solution existe et est une fonction analytique dans le voisinage de  $a$  pourvu que  $\Phi(Z, z)$  soit une fonction analytique vis-à-vis de chacun de ses arguments en  $Z = A$  et  $z = a$ . Rien de tel ne peut être affirmé pour une équation non-linéaire, pour laquelle le domaine d'analyticité et le rayon de convergence des solutions sont en général imprévisibles en raison précisément de la possibilité d'apparition spontanée de singularités.

Une autre différence spectaculaire entre équations linéaires et non-linéaires tient aux comportements comparés de leurs solutions avec celles de leurs équations aux différences équivalentes (voir section 9.5).

<sup>2</sup>obtenue par intégration immédiate !

<sup>3</sup>La *spontanéité* vient du fait que la singularité n'est pas inscrite dans l'équation différentielle : elle dépend de la condition initiale – voir juste après –, alors que l'équation ne fait référence à aucune condition initiale.

<sup>4</sup>D'où l'importance de la condition initiale sur la nature de la solution d'une équation non-linéaire !

## 9.2 Conditions initiales. Conditions aux limites

Comme une équation différentielle implique des dérivées, sa résolution passe par des opérations d'intégration, qui introduisent inévitablement des constantes d'intégration. De ce fait, la seule donnée d'une équation différentielle permet, si on sait le faire, de trouver sa solution *générale*, qui forme un ensemble de cardinal infini en général.

En Physique, l'arrivée d'une équation différentielle est le résultat de la construction d'un modèle qui, pour une situation physique donnée (et un problème bien posé), ne peut donner qu'une et une seule solution. En d'autres termes, il ne suffit pas de disposer d'une équation différentielle, il convient de la compléter par des conditions suggérées par l'expérience que l'on veut décrire théoriquement, ou imposées par des principes physiques (celui de causalité par exemple), ou par le sens physique de la théorie en cours (par exemple, la nécessité pour la fonction d'onde d'un état lié d'être normalisable). Ainsi, s'agissant de trouver la dynamique d'une particule classique, il faut connaître sa vitesse et sa position initiales<sup>5</sup>; faute de quoi, on est dans l'impossibilité de trouver toutes les constantes d'intégration. On parle de problème *mal posé* si l'on ne dispose pas d'autant de conditions que nécessaire : un problème bien posé a une et une seule solution.

Il est d'usage de parler de *conditions initiales*, lorsque la variable est le temps. Par exemple, pour un oscillateur harmonique (bille ponctuelle de masse  $m$  attachée à un ressort parfait de constante de raideur  $k$ , à l'équilibre au point d'abscisse  $x_e$ ), l'équation masse  $\times$  accélération = force s'écrit<sup>6</sup> :

$$m\ddot{x}(t) = -k(x - x_e) \iff \ddot{x} = -\omega^2(x - x_e) \quad (k = m\omega^2) . \tag{9.13}$$

La solution générale est :

$$x(t) = x_e + A \cos \omega t + B \sin \omega t . \tag{9.14}$$

Si maintenant on dit que la position initiale est  $x_0$  et la vitesse initiale  $v_0$ , on peut écrire le système :

$$(x_e + A \cos \omega t + B \sin \omega t)_{t=0} = x_0 , \quad (-\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t)_{t=0} = v_0 \tag{9.15}$$

d'où l'on tire les expressions des deux constantes d'intégration  $A$  et  $B$ . De la sorte, la seule et unique solution est :

$$x = x_e + (x_0 - x_e) \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t ; \tag{9.16}$$

C'est bien l'écriture explicite des conditions initiales qui permet, connaissant la solution *générale*, d'extraire l'unique solution physique associée à ces conditions de départ.

En fait, prescrire des valeurs données pour la solution (et ses dérivées) en un certain point n'est pas la seule façon de déterminer de façon unique la solution du problème (bien) posé. Par exemple, soit l'équation homogène du second ordre :

$$f''(x) - k^2 f(x) = 0 \quad (k \in \mathbb{R}_+) . \tag{9.17}$$

Sa solution générale est :

$$f(x) = Ae^{+kx} + Be^{-kx} . \tag{9.18}$$

Supposons maintenant que, pour des raisons imposées par le problème examiné, la fonction  $f$  soit astreinte à être bornée et continue<sup>7</sup>. Alors, la solution acceptable physiquement est la seule et unique fonction :

$$f(x) = f(0)e^{-k|x|} , \tag{9.19}$$

obtenue en supprimant dans l'expression générale (9.18) l'exponentielle divergente selon le signe de  $x$ . Dans ce cas, il reste à dire ce que vaut  $f(0)$ , par d'autres considérations<sup>8</sup>.

Enfin, il faut savoir que le nombre de paramètres dont dépend au total la solution la plus générale peut être *supérieur* à l'ordre de l'équation. Par exemple, la solution générale de l'équation réelle non-linéaire du premier ordre  $f' = f^{\frac{1}{3}}$  est  $f^{2/3} = \frac{2}{3}(x + C)$ , où  $C$  est quelconque. L'extraction de la racine donne  $f(x) = \alpha[\frac{2}{3}(x + C)]^{\frac{3}{2}}$ , avec  $\alpha = \pm 1$  ; dans ce cas précis, on peut aussi dire qu'il y a deux familles de solutions, associées aux deux branches distinctes solutions de  $(e^{2ik\pi})^{3/2}$ , chaque branche contenant une constante d'intégration  $C$ .

<sup>5</sup> Ainsi, il faut deux conditions initiales par degré de liberté, puisque l'équation fondamentale de la dynamique est du deuxième ordre en temps.

<sup>6</sup>  $x_e$  désigne l'abscisse du point d'équilibre.

<sup>7</sup> C'est exactement le cas pour les équations aux valeurs et fonctions propres rencontrées en Mécanique quantique.

<sup>8</sup> Les experts en Mécanique quantique auront reconnu en (9.17) l'équation aux valeurs propres pour une particule liée par un potentiel attractif  $-g\delta(x)$  ( $g > 0$ ), équation écrite pour  $x \neq 0$ . Le saut en  $x = 0$  de la dérivée  $\psi'$  de la fonction d'onde est pilotée par l'intensité  $g$  de  $\delta$ , représentant la "profondeur" du puits :  $\psi'(0_+) - \psi'(0_-) = -\frac{2mg}{\hbar^2}\psi(0)$ . Dans ce contexte, la valeur  $\psi(0)$  s'obtient en écrivant la condition de normalisation de la fonction d'onde,  $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = 1$ .

## 9.3 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

### 9.3.1 Rappel de quelques résultats

La forme générale d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre  $N$  à coefficients constants est :

$$\sum_{n=0}^N a_n f^{(n)}(z) = 0 \quad (a_N \neq 0) \iff \hat{L}f(z) = 0, \quad (9.20)$$

où les  $a_n$  peuvent dépendre de paramètres mais pas de la variable  $z$ . Pour obtenir la solution de (9.20), il suffit de remarquer que tout repose d'une part sur la fonction exponentielle, douée de sa propriété caractéristique (la dérivée est proportionnelle à la fonction elle-même – de proche en proche, c'est vrai pour toute dérivée d'ordre quelconque), d'autre part sur le fait que l'équation étant linéaire, toute combinaison linéaire de solutions est encore solution.

La fonction exponentielle est en effet la seule à posséder la propriété suivante<sup>9</sup> :

$$\frac{d^m}{dz^m} e^{\lambda z} = \lambda^m e^{\lambda z} \quad (m \in \mathbb{N}) \iff [f^{(m)}(z) = \lambda^m f(z) \iff f(z) = e^{\lambda z}]. \quad (9.21)$$

Il en résulte immédiatement que si l'on injecte la forme  $f(z) = e^{\lambda z}$  dans (9.20), on trouve :

$$\left( \sum_{n=0}^N a_n \lambda^n \right) e^{\lambda z} = 0 \quad \forall z. \quad (9.22)$$

Cette équation n'est satisfaite que si  $\lambda$  est l'un des zéros du polynôme de degré  $N$ ,  $P_N(\lambda)$ , construit avec les coefficients  $a_n$  de l'équation différentielle et appelé *polynôme caractéristique* :

$$P_N(\lambda) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^N a_n \lambda^n = 0 \iff \lambda \in \{\lambda_k\}_{1 \leq k \leq N}. \quad (9.23)$$

Maintenant, par construction, chaque fonction  $f_k = e^{\lambda_k z}$  est solution de l'équation (9.20) puisque :

$$\hat{L}e^{\lambda_k z} = \left( \sum_{n=0}^N a_n \lambda_k^n \right) e^{\lambda_k z} \equiv P_N(\lambda_k) e^{\lambda_k z} = 0 \times e^{\lambda_k z} = 0. \quad (9.24)$$

Par ailleurs,  $\hat{L}$  est un opérateur linéaire, puisque la dérivation est une opération linéaire (la dérivée d'une somme de  $M$  termes est la somme des  $M$  dérivées,  $M$  fini). De cette propriété découle l'égalité :

$$\hat{L}(\alpha\phi(z) + \beta\psi(z)) = \alpha\hat{L}\phi(z) + \beta\hat{L}\psi(z), \quad (9.25)$$

où les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  sont quelconques, tout comme les fonctions  $\phi$  et  $\psi$ . Il en résulte immédiatement que toute combinaison linéaire des solutions particulières  $e^{\lambda_k z}$  :

$$f(z) = \sum_{k=1}^N C_k e^{\lambda_k z} \quad (9.26)$$

est solution de (9.20), *quels que soient les coefficients*<sup>10</sup>  $C_k$ . En effet :

$$\hat{L} \left( \sum_{k=1}^N C_k e^{\lambda_k z} \right) = \sum_{k=1}^N C_k \hat{L} e^{\lambda_k z}; \quad (9.27)$$

<sup>9</sup>D'où, en particulier, le développement de Taylor infini  $e^{\lambda z} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!} (\lambda^n e^{\lambda z})_{z=0} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!} \lambda^n$ .

<sup>10</sup>On devine que c'est cette propriété qui permet de doter l'ensemble des solutions d'une structure d'espace vectoriel de dimension  $N$ , égale à l'ordre de l'équation différentielle.

comme  $\hat{L}e^{\lambda_k z} = 0$  par construction, la dernière somme est nulle, quels que soient les  $C_k$ , et l'équation différentielle (9.20) est bien satisfaite par l'expression (9.26). Cette dernière est de fait la solution *générale* de l'équation : on peut en effet montrer que *toutes* les solutions de l'équation homogène (9.20) sont de cette forme.

Par le théorème fondamental de l'algèbre, le polynôme  $P_N(\lambda)$  défini en (9.23) possède  $N$  zéros complexes  $\lambda_k$  et s'écrit après factorisation :

$$P_N(\lambda) = a_N \prod_{k=1}^N (\lambda - \lambda_k) ; \tag{9.28}$$

si tous les  $\lambda_k$  sont différents, les  $N$  fonctions  $e^{\lambda_k z}$  sont linéairement indépendantes, et constituent une base de l'espace vectoriel des solutions.

Si plusieurs  $\lambda_k$  sont égaux entre eux, c'est-à-dire si l'équation  $P_N(\lambda) = 0$  a des racines multiples (on dit aussi qu'il y a *dégénérescence*), alors le nombre d'exponentielles  $e^{\lambda_k z}$  linéairement indépendantes est strictement inférieur à  $N$ . Par exemple, s'il n'existe qu'une racine multiple,  $\lambda_{k_0}$ , supposée d'ordre  $r$ , alors le polynôme  $P_N$  s'écrit  $P_N(\lambda) = a_N (\lambda - \lambda_{k_0})^r \prod_{k=1}^{N-r} (\lambda - \lambda_k)$ . Il est facile de vérifier que toutes les fonctions  $z^p e^{\lambda_{k_0} z}$ ,  $p = 0, 1, \dots, r - 1$  sont solutions de l'équation, et elles sont visiblement linéairement indépendantes. Il s'ensuit que dans ce cas, la solution générale s'écrit<sup>11</sup> :

$$f(z) = \left( \sum_{p=0}^{r-1} C_{k_0 p} z^p \right) e^{\lambda_{k_0} z} + \sum_{\lambda_k \neq \lambda_{k_0}} C_k e^{\lambda_k z} \quad (r \geq 1) , \tag{9.29}$$

les  $C_{k_0 p}$  et les  $C_k$  étant toujours quelconques.

Lorsque l'équation est inhomogène :

$$\sum_{n=0}^N a_n f^{(n)}(z) = \phi(z) \quad (a_N \neq 0) \iff \hat{L}f(z) = \phi(z) , \tag{9.30}$$

la solution la plus générale s'obtient en faisant la somme d'une solution particulière  $f_{\text{part}}$  et de la solution générale de l'équation homogène associée. En effet, posons :

$$f(z) = f_{\text{part}}(z) + F(z) , \tag{9.31}$$

où il s'agit d'identifier la fonction  $F(z)$ . Le premier membre de (9.30) est :

$$\hat{L}f(z) = \hat{L}[f_{\text{part}}(z) + F(z)] = \hat{L}f_{\text{part}}(z) + \hat{L}F(z) ; \tag{9.32}$$

comme  $f_{\text{part}}$  est une solution particulière de (9.30), on a  $\hat{L}f_{\text{part}} = \phi$ . (9.30) se réécrit alors :

$$\phi(z) + \hat{L}F(z) = \phi(z) \iff \hat{L}F(z) = 0 . \tag{9.33}$$

La dernière écriture montre que  $F(z)$  n'est autre que la solution générale de l'équation homogène associée, soit  $\sum_{k=1}^N C_k e^{\lambda_k z}$ , d'où le résultat annoncé. On verra que c'est pour une équation inhomogène que la méthode des fonctions de Green révèle toute son utilité (section 9.6) – tant qu'il n'est question que d'équations différentielles.

### 9.3.2 Résolution à l'aide de transformations intégrales

Il s'agit juste d'un rappel, pour la complétude. On a vu au ch. 7 que la transformation de Laplace permet de résoudre systématiquement les équations du genre (la variable est notée ici  $t$ ) :

$$\boxed{\sum_{p=0}^N a_p \frac{d^p f}{dt^p} = \phi(t)} \tag{9.34}$$

<sup>11</sup>Si  $r = 1$ , on retrouve le cas précédent où il n'y a pas de dégénérescence.

Si  $F = \mathcal{L}[f]$ ,  $\Phi = \mathcal{L}[\phi]$ , la solution est :

$$F(z) = \frac{1}{Z(z)} \left[ \Phi(z) + \sum_{p=1}^N a_p \sum_{r=0}^{p-1} z^{p-r-1} f^{(r)}(0) \right] \quad (9.35)$$

où  $Z(z) = \sum_{p=0}^N a_p z^p$  est souvent appelé *fonction de transfert* – mais c'est aussi le polynôme caractéristique  $P_N(z)$  introduit plus haut (voir (9.23)). Il s'agit bien de la solution générale, prenant en compte les  $N$  constantes d'intégration  $f^{(r)}(0)$ ,  $r = 0, 1, \dots, N-1$ . L'inversion de Laplace fait apparaître les exponentielles  $e^{\lambda_k t}$ , les  $\lambda_k$  étant les zéros de  $Z(z)$  et donnant des pôles pour  $F(z)$ .

Notons que toutes les solutions d'une équation homogène à coefficients constants admettent une transformée de Laplace, puisqu'elles sont des combinaisons linéaires d'exponentielles  $e^{\lambda_k t}$ . Il en résulte que le formalisme ci-dessus est opérationnel dès que la source  $\phi$  a également une transformée de Laplace.

On peut aussi utiliser la transformation de Fourier, dans l'hypothèse où toutes les transformées existent ; avec  $\tilde{F}(\omega) = \mathcal{F}[f]$ ,  $\tilde{\Phi}(\omega) = \mathcal{F}[\phi]$ , on trouve :

$$\tilde{F}(\omega) = \frac{\tilde{\Phi}(\omega)}{\sum_{p=0}^N a_p (-i\omega)^p} \equiv \frac{1}{Z(-i\omega)} \tilde{\Phi}(\omega) . \quad (9.36)$$

On sait que (9.36) ne représente pas la solution générale<sup>12</sup> (il n'y a pas de constantes d'intégration !), mais le *régime forcé*, effectivement indépendant des conditions initiales, et réalisé physiquement après extinction des transitoires à condition que tous les zéros  $\lambda_k$  de  $Z(z)$  aient une partie réelle strictement négative<sup>13</sup> – c'est bien ce fait qui assure l'amnésie vis-à-vis des valeurs initiales. C'est bien aussi ce que dit l'expression (9.35) : avec la condition ci-dessus pour tous les  $\lambda_k$ , la somme contenant les conditions initiales disparaît de fait dès que  $t \gg (\min_k |\Re \lambda_k|)^{-1}$ .

## 9.4 Équations différentielles linéaires à coefficients variables

Dans le cas homogène, une équation d'ordre  $N$  est de la forme :

$$\sum_{n=0}^N a_n(z) f^{(n)}(z) = 0 \quad (a_N(z) \neq 0) ; \quad (9.37)$$

la dépendance effective des coefficients  $a_n$  par rapport à la variable  $z$  modifie du tout au tout la difficulté technique du problème. En effet, une exponentielle du genre  $e^{\lambda z}$  n'est plus solution puisque le report dans (9.37) donne l'équation  $(\sum_{n=0}^N a_n(z) \lambda^n) e^{\lambda z} = 0$ , qui ne peut visiblement pas être satisfaite avec des  $a_n(z)$  variables.

Toutefois, grâce au caractère linéaire de l'équation, on peut démontrer que la solution générale de cette équation est de la forme :

$$f(z) = \sum_{k=1}^N C_k E_k(z) , \quad (9.38)$$

où les  $E_k(z)$  sont  $N$  solutions particulières linéairement indépendantes. Ainsi, grâce à la linéarité, l'ensemble des solutions peut à nouveau être muni d'une structure d'espace vectoriel. La grosse difficulté, quand les coefficients sont variables, consiste à trouver effectivement ces  $N$  solutions  $E_k(z)$  – dans le cas où les coefficients sont constants, c'est au contraire en principe un jeu d'enfant de trouver les  $N$  solutions  $e^{\lambda_k z}$ , les  $\lambda_k$  étant les zéros du polynôme caractéristique  $P_N(\lambda)$ .

La méthode générale de résolution repose sur des théorèmes démontrés par Fuchs, précisant les conditions qui permettent de chercher les solutions sous la forme<sup>14</sup>  $(z - z_0)^\alpha S(z)$ , où  $\alpha$  est un exposant (pas forcément

<sup>12</sup>Mais, en exécutant les acrobaties décrites dans le ch 6, on peut cependant retrouver la solution générale en faisant réapparaître les constantes liées aux conditions initiales, et retomber bel et bien sur ses pieds.

<sup>13</sup>Dans le cas contraire, la solution diverge quand  $t \rightarrow +\infty$  et ne saurait avoir une transformée de Fourier.

<sup>14</sup>C'est possible quand  $z_0$  est un point ordinaire ou un point singulier régulier.

entier) à déterminer, et où  $S(z)$  est une série entière en  $(z - z_0)$ ,  $S(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (z - z_0)^n$ , dont les coefficients  $c_n$  sont trouvés par une relation de récurrence<sup>15</sup> ; cette dernière s'obtient en reportant dans (9.37) la forme  $f(z) = (z - z_0)^\alpha S(z)$  et en identifiant les termes de même puissance en  $(z - z_0)$ . Une telle relation dépend des valeurs "initiales" des  $c_n$ , fixées par l'application de conditions aux limites, ou par l'exigence que la fonction soit bornée en certains points.

C'est cette méthode qui est mise en œuvre, par exemple, en Mécanique quantique pour trouver les fonctions d'onde stationnaires de l'équation aux valeurs propres dans le cas d'une énergie potentielle  $V$  variant gentiment dans l'espace<sup>16</sup>. Pour mémoire, citons quelques équations apparaissant fréquemment en Physique :

- équation d'Airy<sup>17</sup> :  $f''(z) = zf(z)$
- équation de Weber - Hermite<sup>18</sup> :  $f''(z) + (\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^2)f(z) = 0$
- équation de Bessel<sup>19</sup> :  $f''(z) + \frac{1}{z}f'(z) + (1 - \frac{\nu^2}{z^2})f(z) = 0$ .

## 9.5 Équations différentielles et équations aux différences

Montrons d'abord comment on peut mettre en parallèle une équation différentielle et une équation aux différences. Des équations de ce dernier type apparaissent souvent en Physique, soit directement, soit parce que le problème examiné, s'il s'exprime naturellement en termes de grandeurs continues, se résout plus agréablement avec des variables discrètes – ou inversement<sup>20</sup>. Les équations aux différences sont clairement d'usage universel dans les méthodes de résolution numérique d'équations que l'on ne sait pas traiter analytiquement, lorsqu'un algorithme de proche en proche ou itératif est utilisé.

Soit une suite de nombres  $f_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) obéissant à une certaine relation de récurrence. Par exemple :

$$f_{n+1} = \alpha f_n \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+) . \tag{9.39}$$

Une valeur de départ  $f_0$  étant donnée (à nouveau, outre l'équation, il faut se donner des conditions supplémentaires, ici une seule suffit), la solution de (9.39) est manifestement :

$$f_n = \alpha^n f_0 . \tag{9.40}$$

L'évolution est inflationniste ou déflationniste selon que  $\alpha$  est plus grand ou plus petit que 1.

D'un autre point de vue, l'équation (9.39) se réécrit trivialement :

$$f_{n+1} - f_n = (\alpha - 1)f_n \tag{9.41}$$

et se traduit en bon français en disant que la variation de  $f$  entre  $n$  et  $n + 1$  est proportionnelle à la valeur de  $f$  au point  $n$  – clairement, on peut dire que le premier membre est une *dérivée discrète* : c'est le taux de

<sup>15</sup>Le produit  $(z - z_0)^\alpha S(z)$  porte le nom de série de Frobenius.

<sup>16</sup>Pour  $V(x)$  constant par morceaux, on évite la méthode de Fuchs en travaillant intervalle par intervalle, et en recollant les morceaux conformément aux prescriptions résultant du sens physique de la fonction d'onde (continuité de la fonction et de sa dérivée tant que  $V(x)$  a des sauts *finis*).

<sup>17</sup>On la trouve souvent dans les problèmes d'optique, et elle arrive pour une particule quantique chargée soumise à un champ constant (par exemple, un électron soumis à un champ électrique indépendant du temps et uniforme dans l'espace – voir l'exemple d'application de la transformation de Laplace donné à la fin du ch. 7).

<sup>18</sup>rencontrée notamment à propos de l'oscillateur harmonique quantique.

<sup>19</sup>rencontrée partout en Physique. Bessel était astronome et a introduit ces fonctions qui depuis portent son nom en effectuant l'analyse harmonique du problème lié de Kepler.

<sup>20</sup>De façon caricaturale, on pourrait dire que le théoricien face à un problème continu s'empresse de le discrétiser, et devant un problème discret ne peut s'empêcher de le "continuer"... En pratique, la continuation doit se faire avec discernement ; par exemple, une limite continue en temps doit respecter le Principe de causalité : l'apparition de fonctions  $\delta(t)$  – en tant que limite de fonctions à mémoire courte – peut conduire à des difficultés, tant que l'on a pas réalisé que c'est plutôt  $\delta^{(+)}(t)$  qui, de fait, est la bonne fonction à considérer. En outre, toutes les subtilités liées à l'alternative discret  $\leftrightarrow$  continu (voir notamment section 9.5) doivent rester présentes à l'esprit.

variation de  $f_n$  pour une variation unité de la variable, l'entier  $n$ . L'écriture (9.41) évoque visiblement une équation différentielle du genre :

$$f'(x) = kf(x) \quad (9.42)$$

en posant que la valeur de la fonction  $f(x)$  aux points  $x = n\Delta x$  est précisément égale à  $f_n$ . La solution de (9.42) est  $f(x) = f(0)e^{kx}$ . L'identification va jusqu'au bout en notant que :

$$f_n = \alpha^n f_0 = f_0 e^{n \ln \alpha} = f_0 e^{(\frac{\ln \alpha}{\Delta x})(n\Delta x)} \equiv f(x = n\Delta x) . \quad (9.43)$$

et à condition de poser  $k = \frac{\ln \alpha}{\Delta x}$  (et bien sûr  $f_0 = f(0)$ ).

Ceci étant fait, il est alors légitime d'affirmer que l'équation aux différences (9.39) (ou (9.41)) est la version discrète de l'équation différentielle (9.42). Ces deux écritures représentent finalement la même réalité : on peut même considérer que les  $f_n$  sont des points expérimentaux relevés quand on dispose de la résolution définie par  $\Delta x$ , et constituent la mesure de la grandeur théorique continue  $f(x)$  – faisant *ipso facto* l'hypothèse implicite que la (vraie) fonction  $f(x)$  varie lentement à l'échelle  $\Delta x$ . En tout cas, les deux écritures, discrète et continue, se fondent l'une dans l'autre (il suffit d'imaginer que la résolution est de meilleure en meilleure, c'est-à-dire que  $\Delta x$  est rendu de plus en plus petit).

Cette quasi-coïncidence n'a pas hélas l'universalité que l'on pourrait espérer – d'ailleurs, l'identification complète exige de poser  $k = \frac{\ln \alpha}{\Delta x}$ , d'où l'importance du signe de  $\alpha$ . Ce point s'éclaire en réalisant que l'assimilation d'une fonction  $f(x)$  avec ses valeurs ponctuelles  $f(n\Delta x)$  exige en effet que, à l'échelle  $\Delta x$ ,  $f(x)$  soit une fonction *lentement variable*. Et de fait, si on prend  $\alpha < 0$  dans (9.39), alors les différents  $f_n$  alternent en signe : la fonction  $f(x)$  correspondante n'est sûrement pas à variation lente et on peut même dire intuitivement que, dans la limite  $\Delta x \rightarrow 0$ , cette fonction n'est certainement ni continue, ni *a fortiori* dérivable – une nécessité pourtant s'il s'agit de décrire une équation différentielle !

Cet exemple très simple révèle l'importance d'une question un peu inattendue : élucider les relations précises entre les solutions d'une équation aux différences et celles de son équation différentielle associée<sup>21</sup>. Les quelques exemples suivants essaient de donner une idée de la difficulté du sujet, afin de convaincre que vigilance et prudence sont requises dans toute pratique.

À titre de première illustration, changeons simplement le signe de  $\alpha$  dans (9.39) en prenant maintenant :

$$f_{n+1} = -\alpha f_n \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+) ; \quad (9.44)$$

la solution alors est  $f_n = (-1)^n \alpha^n f_0$ . L'équation différentielle correspondante se trouve en récrivant (9.44) sous la forme  $f_{n+1} - f_n = -(\alpha + 1)f_n$ , soit :

$$f'(x) = -(\alpha + 1)f(x) \iff f(x) = f(0) e^{-(\alpha+1)x} . \quad (9.45)$$

Sans aucun doute, les deux versions donnent des fonctions complètement différentes ; par exemple, si  $\alpha > 1$ , la solution discrète diverge en oscillant, alors que la version continue tend vers zéro exponentiellement vite ! La compréhension en profondeur de ces points assez subtils repose sur la considération des singularités des équations considérées<sup>22</sup>. Clairement, le traitement discret, inévitable sur ordinateur, des équations différentielles (même linéaires) exige un certain savoir-faire, et doit toujours être conduit avec discernement et vigilance.

<sup>21</sup> Un point particulièrement pertinent si un traitement numérique de l'équation différentielle s'impose...

<sup>22</sup> C'est ici le cas parce que le point à l'infini est un *point singulier irrégulier*. De fait, la compréhension en profondeur de telles anomalies passe par l'analyse des points singuliers de l'équation différentielle. Très brièvement : on classe les singularités d'une équation différentielle linéaire en examinant les singularités (au sens de la théorie des fonctions analytiques) des coefficients apparaissant dans (9.5), réécrite de façon canonique (après division par  $a_N(x)$ ) :

$$f^{(N)}(x) + p_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x) + \dots + p_1(x)f'(x) + p_0(x)f(x) = 0 ; \quad (9.46)$$

On dit que  $x_0$  est un point singulier *régulier* si toutes les quantités  $(x - x_0)^k p_{n-k}(x)$  sont analytiques dans un voisinage de  $x_0$ , alors que certains coefficients  $p_m(x)$  ont une singularité en  $x_0$ . La définition s'étend au cas du point à l'infini en effectuant le changement de variable  $X = \frac{1}{x}$ . Un point qui n'est pas régulier est dit *irrégulier*, c'est le cas de  $x = \infty$  dans l'exemple traité ci-dessus. Pour plus de détails, voir par exemple l'ouvrage de BENDER et ORSZAG, ch. 3.

◆ *Remarques*

1. Les relations (9.50) peuvent s'écrire de façon plus formelle comme suit. Soit l'opérateur de translation<sup>23</sup> élémentaire  $\mathcal{T}$  défini comme :

$$\mathcal{T} f_n \stackrel{\text{déf}}{=} f_{n+1} . \tag{9.47}$$

Alors,  $Df_n = (\mathcal{T} - 1)f_n$ ,  $D^2f_n = (\mathcal{T} - 1)^2f_n, \dots, D^k f_n = (\mathcal{T} - 1)^k f_n$ . Le développement de  $(\mathcal{T} - 1)^k$  fait bien apparaître les coefficients du binôme comme en (9.49)

2. On pourrait aussi définir la dérivée discrète comme  $Df_n = f_n - f_{n-1}$ , ou  $Df_n = \frac{1}{2}(f_{n+1} + f_n) - \frac{1}{2}(f_n + f_{n-1})$ . Il ne s'agit le plus souvent que de détails purement conventionnels. Toutefois, dans certains cas assez exceptionnels, des raisons (physiques notamment) imposent un choix définitif et sans ambiguïté. Il en va ainsi, par exemple, pour la formulation de Feynman de la Mécanique quantique (intégrale de chemin) en présence d'un champ magnétique. ◆

De surcroît, la situation, en pratique, est rarement aussi simple : en général, une récurrence n'implique pas seulement deux termes consécutifs, tout en restant linéaire. Une relation très simple de ce type est :

$$f_{n+2} = f_n ; \tag{9.48}$$

elle est dite du *second ordre* puisque chaque  $f_n$  est relié explicitement au  $f_{n'}$  situé deux rangs en amont. Tout comme  $f_{n+1} - f_n$  est la dérivée (première) discrète,  $(f_{n+2} - f_{n+1}) - (f_{n+1} - f_n) \equiv f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n$  peut être considérée comme une dérivée seconde discrète<sup>24</sup>. La relation (9.48) s'écrit aussi :

$$f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n = -2f_{n+1} + 2f_n \tag{9.51}$$

dont l'équivalent continu est :

$$f'' = -2f' . \tag{9.52}$$

La solution générale de l'équation discrète est<sup>25</sup> visiblement :

$$f_n = A + (-1)^n B \quad (A \text{ et } B \text{ constantes arbitraires}) , \tag{9.53}$$

cependant que la solution de l'équation différentielle est :

$$f(x) = C + De^{-2x} \quad (C \text{ et } D \text{ constantes arbitraires}) . \tag{9.54}$$

Ces dernières solutions n'ont *a priori* aucun rapport avec les solutions (9.53) de l'équation discrète ! Notamment, le comportement à l'infini ( $x \rightarrow \infty$ ) de l'expression (9.54) n'a rien à voir avec celui ( $n \rightarrow \infty$ ) de (9.53). Tout au plus peut-on observer que les solutions lentement variables (en fait triviales puisqu'elles sont constantes) obtenues en prenant  $B = D = 0$  coïncident ; en revanche, les solutions variables ( $A = C = 0$  - ce sont en général les plus intéressantes !) n'ont strictement rien à voir l'une avec l'autre<sup>26</sup>.

<sup>23</sup>Le mot *translation* a un sens profond, indépendamment du choix évident de la terminologie ( $\mathcal{T}$  fait passer de  $n$  à  $n + 1$ ). En effet, la dérivée est au cœur des opérateurs infinitésimaux de translation dans l'espace, que l'on rencontre par exemple en Mécanique quantique.

<sup>24</sup>Cette dernière remarque se généralise d'ailleurs comme suit. En définissant  $Df_n = f_{n+1} - f_n$ , on a :

$$Df_n = f_{n+1} - f_n , \quad D^2f_n = D(Df_n) = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n , \quad \dots , \quad D^k f_n = \sum_{p=0}^k (-1)^p C_k^p f_{n+k-p} . \tag{9.49}$$

En adoptant maintenant les correspondances :

$$f_n \leftrightarrow f(x = n\Delta x) , \quad D^k \leftrightarrow f^{(k)}(x) . \tag{9.50}$$

on est en mesure d'associer à une équation aux différences une et une seule équation différentielle, et réciproquement.

<sup>25</sup>Très généralement, ce type de récurrence se résout en posant  $f_n = r^n$  ; pour une récurrence d'ordre  $N$ , on obtient ainsi une équation algébrique de degré  $N$  pour l'inconnue  $r$ . On sait que l'on peut aussi résoudre en effectuant une transformation de Laplace (ch 7).

<sup>26</sup>Autre exemple : la récurrence  $f_{n+1} = n f_n$  et l'équation différentielle  $f' = (x - 1)f$  sont équivalentes, selon la correspondance (9.49). Pourtant, les solutions respectives,  $f_n = (n - 1)! f_1$  et  $f(x) = f(0)e^{\frac{x^2}{2} - x}$  ont des comportements radicalement différents à l'infini : par la formule de Stirling, on a  $f_n \sim n^n = e^{n \ln n}$ , qui diverge infiniment moins vite que  $e^{x^2}$ .

En un peu plus compliqué, soit :

$$f_{n+2} = 2\alpha f_{n+1} + \beta f_n ; \quad (9.55)$$

une récurrence qui est bien du second ordre puisque chaque  $f_n$  dépend des deux  $f_n$  précédents. La solution générale de (9.55) est :

$$f_n = C_+ r_+^n + C_- r_-^n , \quad r_{\pm} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta} , \quad (9.56)$$

où les constantes  $C_{\pm}$  s'obtiennent par identification avec deux conditions supplémentaires, par exemple les valeurs de  $f_0$  et  $f_1$ .

(9.55) s'écrit aussi :

$$f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n = 2(\alpha - 1)f_{n+1} + (\beta + 1)f_n . \quad (9.57)$$

L'équation différentielle associée à (9.55) par les règles (9.49) est :

$$f'' = 2(\alpha - 1)f' + (2\alpha + \beta - 1)f , \quad (9.58)$$

et a pour solution générale :

$$f(x) = A_+ e^{\lambda_+ x} + A_- e^{\lambda_- x} , \quad \lambda_{\pm} = \alpha - 1 \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta} , \quad (9.59)$$

$A_{\pm}$  étant deux constantes d'intégration à trouver par calage avec les conditions initiales. À nouveau, et selon les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ , les deux solutions (9.56) et (9.59) ont des comportements voisins ou très dissemblables.

Ainsi, et même pour une équation linéaire, la discrétisation, ou l'opération inverse ("continuation") peuvent ne pas être des opérations innocentes. Pour être aussi complet que possible dans un tour d'horizon, on doit aussi faire remarquer que la résolution d'une version peut être un jeu d'enfant, alors que la résolution de l'autre est un tour de force ; exemple :  $f_{n+1} - f_n = \frac{1}{f_n}$ , dont la version continue est  $f' = \frac{1}{f}$ , une équation qui n'est pas vraiment difficile à résoudre... Autre exemple célèbre : la diabolique application logistique  $f_{n+1} = r f_n (1 - f_n)$ ,  $r > 0$ , dont la version continue est réellement triviale<sup>27</sup>.

*A fortiori*, une équation différentielle *non-linéaire* et sa version discrétisée peuvent avoir des solutions très différentes. Plus précisément, il peut arriver que la version discrète ait des solutions insoupçonnables au vu de la version continue : à nouveau, le diable est à l'œuvre et peut faire des intrusions spectaculaires en jouant le scénario des singularités spontanées (une telle catastrophe n'est pas toujours sûre, heureusement ou malheureusement, c'est selon).

Par exemple, soit à résoudre l'équation différentielle :

$$f'(x) = f^2(x) - f(x) \quad (9.60)$$

avec la condition  $f(0) = 2$ . La solution est<sup>28</sup> :

$$f(x) = \frac{2}{2 - e^x} \quad (9.61)$$

et présente une divergence en  $x = \ln 2$ . L'équation aux différences correspondante est :

$$f_{n+1} - f_n = f_n^2 - f_n ; \quad (9.62)$$

pour  $f_0 = 2$ , sa solution<sup>29</sup> est  $f_n = 2^{2^n}$ , qui est finie pour tout  $n$  fini. Cette distinction est générale : contrairement à leurs équivalentes non-linéaires continues, les équations aux différences non-linéaires ne sont pas sujettes au phénomène d'apparition de singularités spontanées.

Il convient donc d'être toujours extrêmement prudent quand il s'agit de prévoir le comportement des solutions d'une équation différentielle au vu de celui des solutions de l'équation aux différences, ou inversement.

<sup>27</sup>On obtient l'équation différentielle  $f' = (r - 1)f - f^2$ .

<sup>28</sup>Poser  $g = \frac{1}{f}$  conduit à une équation linéaire pour  $g$ .

<sup>29</sup>On trouve cette solution en posant  $g_n = \log_2 f_n$ , ce qui donne la récurrence linéaire  $g_{n+1} = 2g_n$ .

Ces résultats sont une source de perplexité, et en tout cas doivent inciter à la prudence. En effet, dès qu'il faut résoudre numériquement une équation, force est de recourir à la discrétisation : l'ordinateur ne connaît ni le continu, ni l'infini. La résolution numérique d'une équation différentielle linéaire ou non-linéaire exige donc un grand savoir-faire, et doit toujours être conduite avec vigilance. La règle méthodologique de base est d'avoir le constant souci de procéder à de multiples vérifications de la solution obtenue numériquement (symétries, stabilité vis-à-vis d'un bruit numérique forcé, comportements limites, ...).

*Un canular numérique<sup>a</sup>*

Pour illustrer les remarques précédentes, citons un canular numérique. Soit la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = 111 - \frac{1130}{x_n} + \frac{3000}{x_n x_{n-1}}, \quad (9.63)$$

commençant avec  $x_0 = 2$  et  $x_1 = -4$ . La relation de récurrence est du second ordre (elle met en jeu trois termes consécutifs) et non-linéaire : tout pour plaire.

On peut montrer que, avec ces valeurs de départ, la suite des nombres  $x_n$  a pour limite  $x_\infty = 6$ . Essayez de mettre cette limite en évidence en programmant l'itération sur une machine ne connaissant que les nombres<sup>b</sup>...

Comme le dit l'auteur de l'article "*on observe parfois en machine une bonne et rapide convergence vers un résultat totalement faux*".

<sup>a</sup>Voir l'article de J.-M. MULLER dans *La Recherche*, numéro spécial sur la théorie des nombres, juillet-août 1995.

<sup>b</sup>En revanche, les algorithmes formels du genre *Mathematica* se tirent bien d'affaire, à la condition expresse de n'effectuer aucune opération *numérique* pendant l'itération.

## 9.6 Fonctions de Green

Les fonctions de Green ne sont pas des fonctions spéciales (au sens où on parle de fonctions de Bessel, fonctions de Weber, fonctions d'Airy *etc*) : cette terminologie désigne en réalité un objet mathématique sur lequel est fondée une méthode de résolution des équations *linéaires*, qu'elles soient différentielles ou aux dérivées partielles (voir ch. 10). Dans cette section, sauf mention contraire, les variables seront supposées réelles.

S'agissant des équations différentielles<sup>30</sup>, l'intérêt des fonctions de Green réside principalement en ceci : pour résoudre une équation inhomogène, il faut d'une part déterminer la solution générale de l'équation homogène qui lui est associée, d'autre part trouver une solution particulière de l'équation complète, puis faire la somme des deux et enfin caler les constantes d'intégration avec les données supplémentaires indispensables. La fonction de Green est un moyen systématique de trouver précisément cette solution particulière<sup>31</sup>. En outre la méthode des fonctions de Green se prête bien à la rediscussion des liens importants entre conditions aux limites et analyticité (par exemple : causalité et analyticité).

Par ailleurs, s'il est certain que la méthode de Green révèle pleinement son utilité à propos des équations *aux dérivées partielles*, les idées de base peuvent déjà s'énoncer dans un contexte beaucoup plus simple, celui des équations différentielles : c'est ce qui est fait ci-dessous.

### 9.6.1 Préliminaires

La méthode des fonctions de Green fait un usage intensif de la fonction de Dirac, dont la règle opérationnelle fondamentale est, pour mémoire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0) dx = f(x_0) \quad (9.64)$$

<sup>30</sup>C'est aussi le cas pour les équations aux dérivées partielles.

<sup>31</sup>On connaît également un autre moyen pour trouver une telle solution, c'est la méthode dite de *variation des constantes*.

où la fonction  $f$  est continue en  $x_0$ . En prenant  $f(x) = 1 \forall x$ , on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = 1 . \quad (9.65)$$

Dans les notations de la Théorie des distributions, et pour  $x_0 = 0$ , (9.64) s'écrit :

$$\langle \delta, f \rangle = f(0) . \quad (9.66)$$

Il en résulte que  $\langle \delta, f \rangle = 0$  si  $f(0) = 0$  ; c'est le cas si  $f(x) = x$ , ce que l'on traduit symboliquement par la relation :

$$\boxed{x\delta(x) = 0} \quad (9.67)$$

Pour des fonctions s'annulant à l'infini, une intégration par parties permet de définir la "dérivée" de la fonction  $\delta$  ; on trouve ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x - x_0) dx = [\delta(x - x_0)f(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\delta(x - x_0) dx = -f'(x_0) ; \quad (9.68)$$

en prenant à nouveau  $x_0 = 0$ , ceci s'écrit formellement :

$$\langle \delta', f \rangle = -f'(0) . \quad (9.69)$$

$\delta(x - x_0)$  est une idéalisation de fonctions  $\delta_\varepsilon(x - x_0)$ , régulières et très pointues dont l'aire vaut 1 (précurseurs de  $\delta$ ). Si leur largeur autour de  $x_0$  est  $\varepsilon$ , alors leur hauteur au maximum est d'ordre  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Pour ces précurseurs, on a les relations approchées :

$$\int_a^b f(x)\delta_\varepsilon(x - x_0) dx \simeq f(x_0) , \quad \int_a^b \delta_\varepsilon(x - x_0) dx \simeq 1 \quad (a < x_0 < b, x_0 - a, b - x_0 \gg \varepsilon) , \quad (9.70)$$

à la condition expresse que  $f(x)$  soit lentement variable à l'échelle  $\varepsilon$ . En raisonnant intuitivement avec les  $\delta_\varepsilon$  et en passant à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0+$ , on peut retrouver très rapidement tous les résultats utiles concernant les règles opérationnelles relatives à  $\delta$  et à ses dérivées.

En particulier, l'intégrale d'une  $\delta_\varepsilon$ ,  $\int_a^x \delta_\varepsilon(x - x_0) dx$  ( $a \ll x_0$ ), est une fonction de  $x$ , qui passe rapidement, sur une échelle d'ordre  $\varepsilon$ , de la valeur zéro à la valeur un (par exemple, la fonction  $\delta_{\text{th}, \varepsilon}(x - x_0) = \frac{1}{2}(1 + \tanh \frac{x - x_0}{\varepsilon})$ , avec  $\varepsilon \ll 1$ ). À la limite  $\varepsilon = 0+$ , la primitive de  $\delta$  est la fonction échelon-unité, nulle si  $x < x_0$ , égale à 1 si  $x > x_0$  (sans qu'il soit nécessaire à ce stade de la définir en  $x = x_0$ ). Si toutefois on utilise comme précurseur  $\frac{1}{\pi\varepsilon} \sin \frac{x - x_0}{\varepsilon}$ , le résultat de Dirichlet permet d'écrire très précisément<sup>32</sup> :

$$\int_{-\infty}^x \delta(x' - x_0) dx' = \begin{cases} 0 & \forall x < x_0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = x_0 \\ 1 & \forall x > x_0 \end{cases} \equiv \theta(x - x_0) ; \quad (9.71)$$

(il est en effet parfois nécessaire, pour des raisons physiques, de préciser la valeur en  $x_0$ ) ; il en va d'ailleurs ainsi quand on prend  $\delta_{\text{th}, \varepsilon}(x - x_0)$ . Quoi qu'il en soit dans les détails, le résultat à retenir est :

$$\theta(x - x_0) = \int_{-\infty}^x \delta(x' - x_0) dx' , \quad \frac{d}{dx} \theta(x - x_0) = \delta(x - x_0) . \quad (9.72)$$

On note à nouveau que l'opération d'intégration adoucit les irrégularités<sup>33</sup> : schématiquement,  $\delta$  a deux sauts d'amplitude infinie au même point (l'un dans un sens, l'autre dans le sens contraire), alors que sa primitive n'a qu'un saut fini, d'amplitude unité d'ailleurs.

<sup>32</sup>La fonction  $\theta$  définie en (9.71) diffère donc de la fonction de Heaviside  $Y$  introduite dans le ch. 7 ; elle diffère également de la fonction  $\Theta$  introduite dans le ch. 8 à propos des fonctions de répartition.

<sup>33</sup>Comme la musique, l'intégration adoucit les mœurs.

Ce phénomène d'adoucissement se confirme en prenant maintenant la primitive de la fonction échelon ; en raisonnant graphiquement par exemple, on voit de suite que :

$$\int_{a < x_0}^x \theta(x - x_0) dx = \begin{cases} 0 & \forall x < x_0 \\ x - x_0 & \forall x > x_0 \end{cases}, \tag{9.73}$$

qui est une fonction continue, y compris en  $x_0$ . Ainsi, toute primitive non-triviale de  $\theta$ , fonction discontinue, est une fonction continue. On peut aussi retenir les résultats inverses : si une fonction continue présente une rupture de pente en un point  $x_0$ , sa dérivée a un saut fini, sa dérivée seconde contient un terme proportionnel à  $\delta$ , etc. Formellement, on peut écrire :

$$f'(x) = f'_{\text{reg}}(x) + [f'(x_0+0) - f'(x_0-0)] \theta(x - x_0), \quad f''(x) = f''(x)_{\text{reg}} + [f'(x_0+0) - f'(x_0-0)] \delta(x - x_0), \tag{9.74}$$

où  $f'_{\text{reg}}$  et  $f''_{\text{reg}}$  désigne les dérivées obtenues par les moyens usuels. Noter que les termes complémentaires disparaissent d'eux-mêmes quand  $f$  est dérivable à souhait.

Deux exemples importants pour illustrer ce qui précède. Soit l'équation<sup>34</sup> :

$$f' + g\delta(x - x_0) = 0; \tag{9.75}$$

cette relation dit que la dérivée de  $f$  est nulle partout, sauf en  $x_0$  ;  $f(x)$  a donc un saut en  $x = x_0$  et contient la fonction  $\theta(x - x_0)$  ; la solution générale est  $f(x) = A + B\theta(x - x_0)$ .

Soit maintenant :

$$f'' - g\delta(x) = 0; \tag{9.76}$$

ici, c'est la dérivée seconde de  $f$  qui est nulle (presque) partout :  $f$  est donc de la forme  $Ax + B \forall x \neq 0$ , mais comme  $f'' \equiv (f')'$  donne  $\delta(x)$ , c'est  $f'$  qui a un saut en  $x = 0$  et donc contient  $\theta(x)$  ; la solution générale est donc<sup>35</sup>  $f = Ax + B + Cx\theta(x)$ , une fonction continue dont la dérivée première a un saut fini.

Pour trouver ce saut, il suffit d'intégrer de part et d'autre du point de concentration de la fonction  $\delta$ . Par exemple, pour (9.75), l'intégration membre à membre de part et d'autre de  $x_0$  donne :

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) = -g, \tag{9.77}$$

d'où  $[A + B\theta(x - x_0)]_{x_0+0} - [A + B\theta(x - x_0)]_{x_0-0} = -g$ , soit  $B = -g$  et la solution  $f(x) = A - g\theta(x - x_0)$ . Pour (9.76), on a de même  $f'(0+) - f'(0-) = g$ , soit  $[A + C\theta(x)]_{0+} - [A + C\theta(x)]_{0-} = g$ , d'où  $C = g$  et la solution  $f(x) = Ax + B + gx\theta(x)$ .

Ces conclusions ne changent pas si le premier membre contient d'autres termes impliquant des dérivées de  $f$  d'ordre inférieur. Par exemple, soit :

$$f'' + a(x)f'(x) + b(x)f(x) - g\delta(x) = 0, \tag{9.78}$$

où les coefficients  $a(x)$  et  $b(x)$  sont bornés en  $x = 0$ . L'intégration membre à membre entre  $0 \pm$  donne :

$$f'(0_+) - f'(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} a(x)f'(x)dx + \int_{0_-}^{0_+} b(x)f(x)dx - g = 0, \tag{9.79}$$

Les deux intégrales sont nulles, puisque chaque intégrand est borné (le second est même continu en  $x = 0$ ), et il ne reste que  $f'(0_+) - f'(0_-) = g$ , comme pour (9.76). En toute généralité, le saut fini se produit dans la dérivée  $f^{(N-1)}$  si l'équation est d'ordre  $N$  (si  $N \geq 2$ , la fonction elle-même est donc continue).

<sup>34</sup>L'équation de Poisson  $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  prend la forme  $V'' = -\frac{q\delta(x)}{\epsilon_0}$  sur  $\mathbb{R}$  et pour une charge ponctuelle  $q$  située à l'origine. C'est pourquoi, à une dimension d'espace, le potentiel coulombien, défini comme satisfaisant l'équation de Poisson, varie comme  $|x|$ , et non pas comme  $\frac{1}{|x|}$  ( $V(x) = -\frac{q}{2\epsilon_0}|x| + C^{\text{ste}}$ ).

<sup>35</sup>Noter que selon (9.67),  $[x\theta(x)]' = \theta(x) + x\delta(x) = \theta(x)$ .

### 9.6.2 Définition des fonctions de Green

Soit une équation différentielle linéaire inhomogène :

$$\sum_{n=0}^N a_n(x) f^{(n)}(x) = \phi(x) \iff \hat{L}(x) f(x) = \phi(x) , \quad \hat{L}(x) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sum_{n=0}^N a_n(x) \frac{d^n}{dx^n} . \quad (9.80)$$

La (les) fonction(s) de Green de cette équation sont les fonctions satisfaisant l'équation où la source  $\phi$  a été remplacée<sup>36</sup> par  $\delta(x - x')$ . Si on note  $G(x, x')$  la fonction de Green, alors par définition<sup>37</sup> de  $G$  :

$$\boxed{\sum_{n=0}^N a_n(x) \frac{\partial^n}{\partial x^n} G(x, x') \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \delta(x - x')} \iff \boxed{\hat{L}(x) G(x, x') \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \delta(x - x')} \quad (9.81)$$

Ceci étant, une solution de (9.80) s'exprime alors comme :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, x') \phi(x') dx' . \quad (9.82)$$

En effet, faisant passer  $\hat{L}(x)$  sous l'intégrale en  $x'$  (commutant intégration et dérivations), on a selon (9.81) :

$$\hat{L}(x) f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{L}(x) G(x, x') \phi(x') dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x') \phi(x') dx' = \phi(x) , \quad (9.83)$$

qui reconstitue bien l'équation satisfaite par la fonction  $f$ . La fonction ainsi construite est donc *une* solution (particulière) de l'équation (9.80), dont la solution générale s'écrit :

$$\boxed{f(x) = f_h(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, x') \phi(x') dx'} \quad (9.84)$$

où  $f_h(x)$  désigne la solution générale de l'équation homogène associée  $\hat{L}f = 0$ .

Autrement dit, une fois que l'on connaît la fonction de Green d'une équation différentielle, une solution particulière s'obtient par une simple intégrale, conformément à (9.82). Tout le travail consiste ainsi<sup>38</sup> à déterminer la fonction de Green ; celui-ci fait, le passage d'une source à une autre se fait sans labour supplémentaire, ou presque<sup>39</sup> ; c'est là l'un des avantages de la méthode de Green. En outre, comme le premier membre de (9.80) est caractéristique du système étudié (il en contient toute la dynamique interne), alors que le second membre (la source) représente une action extérieure sur ce système, la fonction de Green contient toute l'information sur la dynamique interne de ce système.

La difficulté est ainsi exclusivement reportée sur la détermination de la *bonne* (voir plus loin) fonction de Green du problème physique posé. Évidemment, pour une équation dont les coefficients  $a_n$  sont constants, il n'y a pas de difficulté majeure ; au contraire, et comme pour les équations différentielles, la dépendance éventuelle  $a_n(x)$  augmente considérablement la difficulté de trouver effectivement  $G(x, x')$ . Quoi qu'il en soit sur ce plan, la seule donnée de l'équation de définition (9.81) ne suffit pas à trouver  $G(x, x')$  dans un contexte donné : comme toujours en pareil cas, il faut adjoindre à l'équation des conditions dictées par le problème (physique) considéré. Par exemple, quand  $x$  est la variable temps, c'est le Principe de causalité qui imposera un type de solution ou une autre ; si  $x$  est une coordonnée, la bonne fonction de Green sera choisie en fonction de ce que

<sup>36</sup>La fonction de Green satisfait donc la même équation que la fonction  $f$  inconnue, la source étant remplacée par une perturbation de type percussion centrée en  $x'$ . En d'autres termes, si dans (9.80) on choisit  $\phi(x) = \delta(x)$ , la solution de cette équation avec une source impulsion-unité est  $f(x) = G(x, x' = 0)$ .

<sup>37</sup>L'équation (9.81) est écrite sous la forme traditionnelle, en faisant apparaître des dérivées partielles ; cette complication n'est qu'apparente, et ne présente ici aucune difficulté quand on réalise que  $x'$ , à ce stade, doit être considéré comme une constante (ou comme un paramètre, c'est comme on veut). On pourrait mettre partout  $x_0$  au lieu de  $x'$  pour marquer explicitement ce fait.

<sup>38</sup>supposant connue la solution générale de l'équation homogène, mais d'ailleurs... (voir plus loin)

<sup>39</sup>On trouve une situation comparable en Mécanique quantique, où les équations de Heisenberg permettent de trouver la dynamique des observables. La considération d'un état initial ou d'un autre, laborieuse dans la description de Schrödinger, est quasi-immédiate dans la vision de Heisenberg.

l'on sait par ailleurs du problème (particule confinée dans un demi-espace, intégrabilité de la fonction d'onde d'un état lié, condition de courant nul pour la diffusion, etc)

Les écritures ci-dessus supposent toutes les grandeurs sans dimension, les fonctions et les variables. À l'inverse, si  $x$  est une longueur, alors on doit avoir  $[a_n L^{-n}][G] = [L]^{-1}$  quel que soit  $n$ , de sorte que  $[G] = [a_n^{-1} L^{n-1}]$ , si  $x$  est le temps,  $[G] = [a_n^{-1} T^{n-1}]$ , etc.

### 9.6.3 Exemples

Il s'agit maintenant d'illustrer les idées précédentes dans des cas très simples, où d'ailleurs la solution peut être obtenue en quelques lignes, sans l'usage des fonctions de Green<sup>40</sup>. Ce qui suit doit donc être considéré comme un simple exercice d'illustration des idées énoncées, où le risque est nul d'être aveuglé par une difficulté technique qui serait ici d'intérêt très secondaire.

En outre, cette illustration sera l'occasion de retrouver des idées importantes, comme par exemple le lien étroit entre causalité et analyticité. Enfin, ces cas très simples permettent de préciser le contenu physique de la fonction de Green, dont l'universalité dépasse très largement le cadre simpliste des exemples traités. Par exemple, on verra que quand la variable est le temps ( $x \rightarrow t$ ), la partie imaginaire de la transformée de Fourier de la fonction de Green décrit, pour un système non purement mécanique (dissipatif), l'absorption d'énergie par ce système.

#### L'oscillateur harmonique isolé

Comme premier exemple, prenons l'équation de l'oscillateur harmonique (bille quasi-ponctuelle de masse  $m$  attachée à un ressort parfait de constante de raideur  $k$ ), supposé *isolé* c'est-à-dire en l'absence de toute interaction avec un milieu produisant de l'amortissement (il s'agit donc d'un système purement mécanique, à peu de degrés de liberté – en fait un seul –, dont le mouvement s'effectue à énergie constante) ; dans les variables physiques  $x =$  écart à l'équilibre,  $t =$  temps,  $\phi =$  force par unité de masse), l'équation avec une force (excitation) quelconque est<sup>41</sup> :

$$m\ddot{x} = -kx + F(t) \iff \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \phi(t)} \quad k = m\omega_0^2, \phi(t) = \frac{F(t)}{m} ; \tag{9.85}$$

dans la suite, la quantité  $\phi(t)$  sera appelée *source*. Ceci étant posé, l'équation satisfaite par la fonction de Green associée est :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, t') + \omega_0^2 G(t, t') = \delta(t - t') ; \tag{9.86}$$

ici,  $G$  a la dimension d'un temps. Dans les notations en cours, (9.84) se transcrit comme suit :

$$x(t) = x_h(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, t')\phi(t')dt' , \quad x_h(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t ; \tag{9.87}$$

sans aucun doute, le second terme est une solution particulière de l'équation :

$$x_{\text{part}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, t')\phi(t')dt' , \tag{9.88}$$

et a un sens physique clair :  $G(t, t')$  décrit essentiellement la *réponse* de l'oscillateur à la perturbation  $\phi(t)$  (force par unité de masse).

Compte tenu des remarques préliminaires (sous-section 9.6.1), le terme le plus singulier est celui de plus haute dérivée, ici une dérivée seconde, et c'est elle qui contient le saut infini imposé par la présence de  $\delta$  au second membre. Il en résulte, selon (9.72), que la primitive de cette dernière (la dérivée première, donc) contient

<sup>40</sup>On pourrait objecter que l'on fait donner l'artillerie pour tuer une mouche, mais ce serait hors de propos.

<sup>41</sup>Dans ces notations, la source est homogène à une accélération. Par ailleurs, dans (9.85), l'origine est prise au point d'équilibre ( $x_e = 0$ ).

une fonction  $\theta$  (un saut fini) et que la primitive de la dérivée (soit  $G$ ) est continue en  $t' = t$ , conformément à (9.73).

Ce rappel étant fait, pour  $t \neq t'$ , (9.86) se réduit à :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, t') + \omega_0^2 G(t, t') = 0 \quad \forall t \neq t' . \quad (9.89)$$

On peut donc écrire<sup>42</sup> :

$$G(t, t') = \begin{cases} C \cos \omega_0 t + D \sin \omega_0 t & \forall t < t' \\ A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t & \forall t > t' \end{cases} \quad (9.90)$$

les quantités  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont les constantes d'intégration vis-à-vis de l'intégration en  $t$ , et sont donc *a priori* des fonctions de  $t'$ . La question est maintenant de les déterminer.

Le point à bien comprendre est que les deux expressions apparaissant dans (9.90) sont les expressions d'une seule et même fonction,  $G(t, t')$ , chacune étant valide dans une région donnée,  $t < t'$  ou  $t > t'$ . Pour trouver les "constantes"  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  – ou en tout cas en déterminer certaines, il suffit d'exploiter ce que l'on sait de  $G$  et de sa dérivée. L'idée est d'utiliser les deux expressions (9.90) et, partant de chaque région, de venir vers leur frontière commune (ici, le point  $t = t'$ , *l'instant  $t'$  étant fixé*) pour y écrire les conditions sur  $G$  et sa dérivée. C'est typiquement ce que l'on appelle des conditions<sup>43</sup> de *raccordement*. Par exemple, on sait que  $G$  est continue, y compris en  $t = t'$ . On part donc de l'expression  $C \cos \omega_0 t + D \sin \omega_0 t$ , vraie à gauche de  $t'$ , et on fait tendre  $t$  vers  $t'$  par valeurs *inférieures* ; ceci donne la valeur à gauche :

$$G(t = t' - 0, t') = C \cos \omega_0 t' + D \sin \omega_0 t' ; \quad (9.91)$$

De même, la valeur à droite en  $t = t'$  est  $G(t = t' + 0, t') = A \cos \omega_0 t' + B \sin \omega_0 t'$  ; la continuité de  $G$  donne une première relation<sup>44</sup> entre les "constantes"  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  :

$$C \cos \omega_0 t' + D \sin \omega_0 t' = A \cos \omega_0 t' + B \sin \omega_0 t' ; \quad (9.92)$$

En revanche, on sait d'avance que la dérivée  $\frac{\partial G}{\partial t}$  a un saut, en  $t = t'$  (voir (9.76)) ; l'amplitude du saut se trouve en intégrant en  $t$  (9.86) de part et d'autre de  $t'$ . L'intégration de la dérivée seconde donne la variation de la dérivée première de part et d'autre du point  $t'$  ; par ailleurs, comme  $G$  est une fonction bornée continue, le terme en  $\omega_0^2 G$  donne zéro (intégration sur un intervalle de mesure nulle) – quant au terme  $\delta(t - t')$  du second membre, il donne 1 par définition de  $\delta$ . Au total on obtient ainsi l'égalité<sup>45</sup> :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} G(t, t') \right)_{t=t'+0} - \left( \frac{\partial}{\partial t} G(t, t') \right)_{t=t'-0} = 1 . \quad (9.93)$$

En allant chercher à nouveau les deux expressions (9.90), on trouve la deuxième équation de raccordement :

$$-\omega_0 A \sin \omega_0 t' + \omega_0 B \cos \omega_0 t' - [-\omega_0 C \sin \omega_0 t' + \omega_0 D \cos \omega_0 t'] = 1 ; \quad (9.94)$$

Les deux équations (9.92) et (9.94) produisent finalement le système linéaire inhomogène :

$$\begin{cases} (A - C) \cos \omega_0 t' + (B - D) \sin \omega_0 t' = 0 \\ -(A - C) \sin \omega_0 t' + (B - D) \cos \omega_0 t' = \frac{1}{\omega_0} \end{cases} , \quad (9.95)$$

<sup>42</sup>On note que, par définition,  $G(t, t')$  a de part et d'autre de  $t = t'$  l'allure d'une solution générale de l'équation homogène – c'est pourquoi la détermination de  $G$  est tributaire de la connaissance de cette solution générale, et c'est bien dans un tel contexte que  $G$  est efficace pour trouver une solution particulière.

<sup>43</sup>Cette procédure est systématique en Mécanique quantique quand l'énergie potentielle  $V(x)$  est continue par morceaux : en chaque point de discontinuité *finie* de  $V$ , la fonction propre  $\psi(x)$  et sa dérivée sont continues. C'est seulement lorsque  $V$  a un saut infini (par exemple  $V(x) \propto \delta(x - x_0)$ , ou puits carré infini) que  $\psi'$  a un saut,  $\psi$  restant *toujours* continue puisque l'équation aux valeurs et fonctions propres  $H\psi = E\psi$  est du second ordre d'espace (ou impulsion).

<sup>44</sup>*Attention* : il faut se souvenir que  $t'$  est fixé, et que les intégrations ont porté sur la variable  $t$  (de sorte que  $C$  et  $D$  sont des fonctions (cachées !) de  $t'$ ) ; surtout, ne pas déduire de cette équation  $A = C$  et  $B = D$  au motif que les sin et les cos sont des fonctions linéairement indépendantes !

<sup>45</sup>Même type de remarque que dans la note 44.

dont la solution est :

$$(A - C) = -\frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t' , \quad (B - D) = \frac{1}{\omega_0} \cos \omega_0 t' . \quad (9.96)$$

Selon (9.90), on a donc :

$$G(t, t') = \begin{cases} C(t') \cos \omega_0 t + D(t') \sin \omega_0 t & \forall t < t' \\ \left[ C(t') - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t' \right] \cos \omega_0 t + \left[ D(t') + \frac{1}{\omega_0} \cos \omega_0 t' \right] \sin \omega_0 t & \forall t > t' \end{cases} ; \quad (9.97)$$

ceci peut s'écrire d'une seule façon :

$$G(t, t') = \left[ C(t') - \frac{1}{\omega_0} \theta(t - t') \sin \omega_0 t' \right] \cos \omega_0 t + \left[ D(t') + \frac{1}{\omega_0} \theta(t - t') \cos \omega_0 t' \right] \sin \omega_0 t , \quad (9.98)$$

ou encore<sup>46</sup> :

$$G(t, t') = C(t') \cos \omega_0 t + D(t') \sin \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \theta(t - t') \sin \omega_0(t - t') . \quad (9.99)$$

On vérifie aisément que cette fonction est bien solution de (9.86), quelles que soient les fonctions  $C(t')$  et  $D(t')$ , et en constitue donc la solution générale. En effet, on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [\theta(t - t') \sin \omega_0(t - t')] = \delta'(t - t') \sin \omega_0(t - t') + 2\omega_0 \delta(t - t') \cos \omega_0(t - t') - \omega_0^2 \theta(t - t') \sin \omega_0(t - t') . \quad (9.100)$$

Par ailleurs  $\langle \delta', f \rangle = -f'(0)$ ,  $\langle \delta, f \rangle = f(0)$ , d'où :

$$\delta'(t - t') \sin \omega_0(t - t') = -\omega_0 \delta(t - t') \cos \omega_0(t - t') = -\omega_0 \delta(t - t') , \quad \delta(t - t') \cos \omega_0(t - t') = \delta(t - t') . \quad (9.101)$$

Au total, il vient :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [\theta(t - t') \sin \omega_0(t - t')] = \omega_0 \delta(t - t') - \omega_0^2 \theta(t - t') \sin \omega_0(t - t') , \quad (9.102)$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, t') &= -\omega_0^2 [C(t') \cos \omega_0 t + D(t') \sin \omega_0 t] - \omega_0 \theta(t - t') \sin \omega_0(t - t') + \delta(t - t') \\ &= -\omega_0^2 G(t, t') + \delta(t - t') \quad \forall C, D \quad \text{CQFD} . \end{aligned} \quad (9.103)$$

Dans l'expression (9.99), il reste deux "constantes" indéterminées,  $C(t')$  et  $D(t')$ , et c'est bien normal puisque l'équation (9.86) satisfaite par  $G(t, t')$  est une équation aux dérivées partielles du second ordre, et qu'aucune condition supplémentaire n'a encore été imposée à  $G(t, t')$  : pour l'instant, la solution générale de l'équation (9.85) a pour expression (9.87) où  $G(t, t')$  est donnée en (9.99). Il reste ainsi 4 "constantes" encore indéterminées pour l'instant : les deux (vraies) constantes  $a$  et  $b$  dans (9.87) et les deux fonctions  $C(t)$  et  $D(t)$ . Les conditions initiales spécifiant, par exemple, la position et la vitesse à un instant de référence donneront deux relations supplémentaires, mais il faut visiblement invoquer d'autres contraintes pour tout trouver.

Comme toujours, s'agissant d'un problème physique bien posé, ce sont des considérations physiques qui vont permettre de lever toute ambiguïté ou indétermination. Ici, c'est le principe de causalité que l'on invoque : il est certain que, en vertu de la causalité et selon (9.87), on doit avoir  $G(t, t') = 0$  si  $t < t'$ , car la réponse  $x$  à l'instant  $t$  ne saurait dépendre de la valeur de la source à un instant *postérieur*. Revenant à l'expression (9.99) de la solution générale, l'exigence du principe de causalité conduit immédiatement à  $C = D \equiv 0$ .

Physiquement, la *bonne* fonction de Green est donc, quels que soient  $t$  et  $t'$ , donnée par (9.99) avec  $C = D = 0$ , soit :

$$\boxed{G_{\text{av}}(t, t') = \frac{1}{\omega_0} \theta(t - t') \sin \omega_0(t - t')} \quad (9.104)$$

<sup>46</sup>On note que, à ce stade,  $G(t, t')$  n'est pas une fonction de la seule différence  $t - t'$ .

l'indice  $av$  (pour fonction de Green *avancée*, on dit aussi fonction de Green *causale*)<sup>47</sup> rappelle qu'il s'agit de la fonction nulle pour  $t < t'$ . Le facteur  $\theta(t - t')$ , qui apparaît *spontanément* dans le calcul est là pour ça et fait ce qu'il faut.

Il est important de souligner ce fait essentiel : c'est l'application de conditions particulières, dictées par des considérations physiques, qui permet de lever toute ambiguïté pour la réponse attendue. Ici, c'est le Principe de causalité qui achève la détermination de la fonction de Green, imposant la condition aux limites<sup>48</sup>  $G(t, t') = 0$  si  $t < t'$ , i.e.  $t - t' < 0$ . En outre, on note que  $G$  est maintenant une fonction de la seule différence des temps  $t - t'$  : une fois les considérations physiques prises en compte, le mouvement physique de la bille ne dépend que de l'intervalle *écoulé* à partir d'un certain instant<sup>49</sup>.

Une chose doit aussi être remarquée : la fonction de Green (9.104) n'a pas ici de transformée de Fourier au sens usuel. Par exemple, pour la fonction avancée, l'écriture ( $\mathcal{G}_{av} = \mathcal{F}[G_{av}]$ ) :

$$\mathcal{G}_{av}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{1}{\omega_0} \theta(t - t') \sin \omega_0(t - t') e^{i\omega(t-t')} = \frac{1}{\omega_0} \int_0^{+\infty} dt'' \sin \omega_0 t'' e^{i\omega t''} = ??? \quad (9.106)$$

n'a pas de sens, et doit donc être régularisée. Une façon de faire converger l'intégrand à l'infini est d'introduire "à la main" un facteur exponentiel convergent  $e^{-\varepsilon t}$  ( $\varepsilon > 0$  !) et de prendre la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  *après* intégration. On redéfinit ainsi :

$$\mathcal{G}_{av}(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\omega_0} \int_0^{+\infty} dt \sin \omega_0 t e^{i\omega t} e^{-\varepsilon t} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\omega_0} \left( \frac{1}{\omega + \omega_0 + i\varepsilon} - \frac{1}{\omega - \omega_0 + i\varepsilon} \right) . \quad (9.107)$$

Chacune des fractions rationnelles donne la partie principale de Cauchy,  $\mathcal{P}$ , et une fonction de Dirac ; au total, ainsi régularisée, la transformée de Fourier de la fonction de Green avancée est :

$$\boxed{\mathcal{G}_{av}(\omega) = \frac{1}{2\omega_0} \left( \mathcal{P} \frac{1}{\omega + \omega_0} - i\pi\delta(\omega + \omega_0) - \mathcal{P} \frac{1}{\omega - \omega_0} + i\pi\delta(\omega - \omega_0) \right)} \quad (9.108)$$

La justification physique d'une telle régularisation – *a priori* assez artificielle – apparaîtra clairement dans l'étude de l'oscillateur amorti (voir ci-dessous) – dont la fonction de Green, au contraire, possède tout naturellement une transformée de Fourier.

Quoi qu'il en soit, admettant pour l'instant cette régularisation pour les transformées de Fourier et par le théorème de convolution appliqué à (9.82), la transformée  $X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)](\omega)$  est donnée par<sup>50</sup> :

$$X(\omega) = \frac{1}{2}(a - ib)\delta(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2}(a + ib)\delta(\omega - \omega_0) + \mathcal{G}_{av}(\omega)\Phi(\omega) , \quad (9.109)$$

où  $\Phi = \mathcal{F}[\phi]$ , et où  $a$  et  $b$  sont les constantes apparaissant en (9.87).

En définitive, la solution la plus générale et physiquement acceptable du mouvement de l'oscillateur mécanique en présence de la source  $\phi(t)$  est<sup>51</sup> :

$$x(t) = x_h(t) + \frac{1}{\omega_0} \int_{-\infty}^t \sin \omega_0(t - t')\phi(t') dt' , \quad (9.110)$$

<sup>47</sup>On définit de même la fonction de Green *retardée* (ou anticausale),  $G_{ret}(t, t')$  nulle, elle, pour  $t > t'$ , en prenant  $C = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t'$  et  $D = -\frac{1}{\omega_0} \cos \omega_0 t'$ , ce qui donne :

$$\boxed{G_{ret}(t, t') = -\frac{1}{\omega_0} \theta(t' - t) \sin \omega_0(t - t') \equiv G_{av}(t', t)} \quad (9.105)$$

En quelque sorte,  $G_{av}(t, t')$  propage le système du présent vers le futur,  $G_{ret}(t, t')$  propage du présent vers le passé. La dernière égalité traduit la symétrie par renversement du temps pour un système purement mécanique (non-amorti, c'est-à-dire non dissipatif).

<sup>48</sup>De même, en Mécanique quantique, ce sont les conditions imposées aux fonctions propres – conditions *mathématiques* imposées en vertu du sens *physique* attribué à ces fonctions – qui produisent la quantification spontanée de l'énergie des états liés. Le même type de quantification se produit pour une corde vibrante dont les extrémités sont fixées.

<sup>49</sup>On peut voir là la signature de l'uniformité du temps : que l'on démarre une *manip* à midi ou au goûter ne change pas le résultat observé au bout d'un quart d'heure.

<sup>50</sup>Se souvenir que  $\mathcal{F}[e^{-i\omega_0 t}] = \delta(\omega - \omega_0)$ .

<sup>51</sup>La source étant homogène à une accélération, le second membre de (9.110) est bien une longueur.

où la borne supérieure de l'intégrale prend en compte le fait que  $G_{av}(t, t')$  est nulle si  $t' > t$ . On peut maintenant fixer les constantes  $a$  et  $b$  contenues dans  $x_h(t)$ . Par exemple, si on se dit qu'à un certain instant  $t_0$ , position et vitesse valent respectivement  $x_0$  et  $v_0$ , on peut écrire :

$$x_0 = a \cos \omega_0 t_0 + b \sin \omega_0 t_0 + \frac{1}{\omega_0} \int_{-\infty}^{t_0} \sin \omega_0(t_0 - t') \phi(t') dt' , \tag{9.111}$$

et :

$$v_0 = -a\omega_0 \sin \omega_0 t_0 + b\omega_0 \cos \omega_0 t_0 + \int_{-\infty}^{t_0} \cos \omega_0(t_0 - t') \phi(t') dt' , \tag{9.112}$$

ce qui fournit deux équations<sup>52</sup> pour les deux constantes  $a$  et  $b$ .

Ainsi, la fonction de Green étant trouvée, la solution relative à une source donnée s'obtient par une simple intégration ; un changement de source n'exige que le calcul d'une seule nouvelle intégrale : le travail est fait une fois pour toutes par la détermination explicite de la bonne fonction de Green associée à l'équation considérée.

Pour illustrer ceci, supposons que l'oscillateur, au repos jusqu'à un certain instant conventionnellement pris comme origine  $t = 0$ , est soumis à partir de  $t = 0$  à une perturbation  $\phi(t)$  non nulle (*i.e.*  $\phi(t) = Y(t)\tilde{\phi}(t)$ ). Dans ces conditions, les deux constantes  $a$  et  $b$  sont nulles, comme on le voit en écrivant les deux équations (9.111) et (9.112) avec  $t_0 = 0$  : comme  $\phi(t) = 0$  pour  $t < 0$ , les deux intégrales sont encore nulles à  $t = 0$ , et le système pour  $a$  et  $b$  n'a que la solution triviale  $a = b = 0$ , d'où il résulte  $x_h(t) \equiv 0$ . Dans ces conditions précises, l'expression de la solution se réduit à :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{av}(t, t') \phi(t') dt' = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \sin \omega_0(t - t') \phi(t') dt' \quad (t > 0) , \tag{9.113}$$

où la borne inférieure résulte du fait que  $\phi(t)$  est maintenant supposée nulle à  $t < 0$ .

Par exemple, si on applique de l'extérieur une force constante<sup>53</sup>  $\frac{F_0}{m}$  à partir de  $t = 0$ , alors la source est  $\phi(t) = \frac{F_0}{m} Y(t)$  ; l'oscillateur étant toujours initialement au repos (avant l'arrivée de la perturbation), la solution est :

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0} \int_0^t \sin \omega_0(t - t') dt' = \frac{F_0}{m\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t) . \tag{9.114}$$

L'oscillation est toujours harmonique, mais s'effectue maintenant de part et d'autre d'une nouvelle position d'équilibre d'abscisse  $x_{eq} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \equiv \frac{F_0}{k}$ , correspondant au point d'équilibre entre la force de rappel vers  $x = 0$  et la force constante  $F_0$  appliquée en plus de l'extérieur ( $m\omega_0^2 x_{eq} \equiv kx_{eq}$ ) ; (9.114) se réécrit comme :

$$x(t) = x_{eq} (1 - \cos \omega_0 t) . \tag{9.115}$$

De fait, l'application soudaine d'une force constante ne fait que déplacer le point d'équilibre autour duquel s'effectue l'oscillation, dont la fréquence est inchangée<sup>54</sup>. Après application de la force, l'énergie (nulle avant) est constante et égale à  $\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 (x - x_{eq})^2 = \frac{F_0^2}{2m\omega_0^2} \equiv \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_{eq}^2$  : c'est l'énergie potentielle de la bille en  $x = 0$  quand le point d'équilibre est  $x_{eq}$ .

*Remarque*

Les résultats qui viennent d'être obtenus ont une portée qui dépasse le cas de l'oscillateur harmonique. Par exemple, pour une équation de propagation :

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 \psi}{dt^2} - k^2 \psi(t) = \phi(t) . \tag{9.116}$$

la fonction de Green satisfait :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, t') - k^2 G(t, t') = \delta(t - t') . \tag{9.117}$$

<sup>52</sup>Le système (9.111) et (9.112) a un déterminant égal à 1, et a donc toujours une solution et une seule.

<sup>53</sup>Exemple : une particule chargée liée harmoniquement, que l'on soumet à  $t \geq 0$  à un champ électrique constant.

<sup>54</sup>Le même phénomène se produit en Mécanique quantique.

La fonction de Green s'obtient en remplaçant  $\omega_0$  par  $ikc$  (et en multipliant par  $c^2$ ) la fonction de Green de l'oscillateur. Ainsi, la fonction de Green avancée de (9.116) est :

$$G_{av}(t, t') = \frac{c}{k} \theta(t - t') \sinh kc(t - t') . \quad (9.118)$$

### L'oscillateur harmonique amorti

Il vaut la peine de regarder le cas de l'oscillateur en présence de frottement, afin d'exhiber les différences qualitatives entre un système *réel* (en pratique, il y a toujours de l'amortissement) et l'oscillateur isolé, qui est toujours un peu une vue de l'esprit : physiquement on doit considérer le cas non-amorti comme l'idéalisation d'un oscillateur réel observé sur une échelle de temps courte par rapport à l'amortissement (soit  $t \ll \gamma^{-1}$  dans la notation qui va être introduite). Pour s'en tenir à la description la plus simple, on choisit un frottement proportionnel à la vitesse (frottement fluide). Dans ces conditions, l'équation fondamentale en présence d'une source  $F(t)$  est (comparer avec (9.85)) :

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - kx + F(t) \iff \boxed{\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \phi(t)} \quad (\gamma > 0, F = m\phi) \quad (9.119)$$

$\gamma^{-1}$  a la dimension d'un temps, c'est une échelle de temps supplémentaire par rapport à  $\omega_0^{-1}$  (à un facteur  $2\pi$  près) donne la période d'oscillation. Il existe ainsi désormais un paramètre sans dimension<sup>55</sup>,  $Q \equiv \frac{\omega_0}{\gamma}$ , dont les valeurs grandes ou petites devant l'unité donneront deux types de comportements qualitativement différents (respectivement : régime sous-amorti et régime sur-amorti), le cas limite  $Q = +\infty$  correspondant à l'oscillateur idéal sans amortissement (isolé).

Ceci étant, l'équation satisfaite par la fonction de Green associée à (9.119) est alors :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, t') + \gamma \frac{\partial}{\partial t} G(t, t') + \omega_0^2 G(t, t') = \delta(t - t') . \quad (9.120)$$

La procédure suivie maintenant est parallèle à celle entreprise précédemment. Pour  $t \neq t'$ , (9.120) est :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, t') + \gamma \frac{\partial}{\partial t} G(t, t') + \omega_0^2 G(t, t') = 0 \quad \forall t \neq t' . \quad (9.121)$$

Afin de simplifier les écritures, on écrit la solution de cette équation en combinaison linéaire d'exponentielles complexes (et non plus en sin et cos) :

$$G(t, t') = \begin{cases} C_+ e^{i\omega_+ t} + C_- e^{i\omega_- t} & \forall t < t' \\ A_+ e^{i\omega_+ t} + A_- e^{i\omega_- t} & \forall t > t' \end{cases} , \quad (9.122)$$

où  $\omega_{\pm}$  désigne les racines de l'équation  $-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2 = 0$ , soit  $\omega_{\pm} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} + i\frac{\gamma}{2} \equiv \pm\tilde{\omega}_0 + i\frac{\gamma}{2}$  : maintenant, en conséquence de l'amortissement, les fréquences caractéristiques ont une partie imaginaire finie (mais toujours positive, quels que soient<sup>56</sup>  $\omega_0$  et  $\gamma$ ).

Les équations de raccordement s'écrivent ici :

$$C_+ e^{i\omega_+ t'} + C_- e^{i\omega_- t'} = A_+ e^{i\omega_+ t'} + A_- e^{i\omega_- t'} , \quad (9.123)$$

$$i\omega_+ A_+ e^{i\omega_+ t'} + i\omega_- A_- e^{i\omega_- t'} - [i\omega_+ C_+ e^{i\omega_+ t'} + i\omega_- C_- e^{i\omega_- t'}] = 1 . \quad (9.124)$$

<sup>55</sup> $Q$  mesure ce qu'il est convenu d'appeler *facteur de qualité* de l'oscillateur : plus  $Q$  est grand, plus la résonance est fine.

<sup>56</sup>Si  $\gamma < 2\omega_0$ , les  $\omega_{\pm}$  ont une partie réelle finie (régime sous-amorti, frottement faible). Dans le cas contraire,  $\gamma > 2\omega_0$ , on a  $\omega_{\pm} = i\left(\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}\right)$  : les  $\omega_{\pm}$  sont alors imaginaires pures (régime sur-amorti, frottement fort, pas d'oscillation pendant relaxation), leurs parties imaginaires étant toutes deux positives.

Afin d’aller plus vite, cherchons d’emblée la fonction de Green avancée, ce qui revient à prendre  $C_{\pm} = 0$ . On trouve alors, après calcul<sup>57</sup> :

$$G_{av}(t, t') = \frac{1}{\tilde{\omega}_0} \theta(t - t') e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')} \sin \tilde{\omega}_0(t - t') \tag{9.126}$$

Ici apparaît une première différence qualitative avec le cas non amorti – la transformée de Fourier de  $G_{av}$  existe au sens usuel :

$$\mathcal{G}_{av}(\omega) = \frac{1}{\tilde{\omega}_0} \int_0^{+\infty} dt e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin \tilde{\omega}_0 t e^{i\omega t} = \frac{1}{2\tilde{\omega}_0} \left( \frac{1}{\omega + \tilde{\omega}_0 + i\frac{\gamma}{2}} - \frac{1}{\omega - \tilde{\omega}_0 + i\frac{\gamma}{2}} \right) = \frac{1}{\tilde{\omega}_0^2 - (\omega + i\frac{\gamma}{2})^2} ; \tag{9.127}$$

Cette expression montre que le paramètre de frottement  $\gamma$  (donnant l’amortissement) se substitue tout naturellement au paramètre “fictif”  $\varepsilon$  introduit en (9.107) pour effectuer la régularisation. Comme tous les systèmes physiques sont amortis (même “infinitement peu”), la procédure de régularisation (9.107), somme toute *a priori* assez artificielle, s’en trouve justifiée – au moins dans l’hypothèse du frottement fluide. Notons que, en tant que transformée de Fourier d’une fonction à valeurs réelles,  $\mathcal{G}_{av}$  possède la symétrie :

$$\mathcal{G}_{av}(-\omega) = [\mathcal{G}_{av}(\omega)]^* . \tag{9.128}$$

Ceci signifie que la partie réelle de  $\mathcal{G}_{av}(\omega)$  est paire, que sa partie imaginaire est impaire<sup>58</sup> :

$$\mathcal{G}_{av}(\omega) = \mathcal{G}_{av1}(\omega) + i \mathcal{G}_{av2}(\omega) : \quad \mathcal{G}_{av1}(-\omega) = \mathcal{G}_{av1}(\omega) , \quad \mathcal{G}_{av2}(-\omega) = -\mathcal{G}_{av2}(\omega) . \tag{9.129}$$

Par ailleurs, l’expression intégrale de  $G_{av}(t, t')$  :

$$G_{av}(t, t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t-t')} \mathcal{G}_{av}(\omega) d\omega \tag{9.130}$$

reflète bien une fois encore le lien entre analyticité et causalité. En effet, pour  $t > t'$ , on referme le contour par le bas, et on ramasse les deux résidents de  $\mathcal{G}_{av}(z)$  en  $z_{\pm} = -i\frac{\gamma}{2} \pm \tilde{\omega}_0$ . Au contraire, pour  $t < t'$ , on ferme par en haut, mais comme il n’y a aucune singularité, l’intégrale est nulle comme il se doit. Avec les définitions en cours<sup>59</sup>, le Principe de causalité se traduit par le fait que  $\mathcal{G}_{av}(\omega)$  est analytique dans le demi-plan supérieur. Quand l’amortissement est nul, les pôles se trouvent sur la droite réelle, et il faut bien régulariser, d’une façon ou d’une autre, puisque le chemin d’intégration bute sur les singularités, d’où la partie principale de Cauchy et la fonction de Dirac.

Il a été affirmé plus haut que la fonction de Green contient toute la dynamique interne du système. Ceci se voit bien sur la transformée de Fourier  $\mathcal{G}_{av}(\omega)$ . Selon (9.127), et compte tenu de l’expression de  $\tilde{\omega}_0$ , on a :

$$\mathcal{G}_{av}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2} + i \frac{\gamma\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2} . \tag{9.131}$$

Notamment, le module de  $\mathcal{G}_{av}(\omega)$  présente un pic très marqué lorsque  $\gamma \ll \omega_0$  ( $Q \gg 1$ ), ce qui traduit le phénomène banal de *résonance* lorsqu’on excite un oscillateur (sous-amorti)   une pulsation  $\omega$  voisine de sa pulsation propre  $\omega_0$ .

L’importance de la fonction de Green tient aussi au fait qu’elle décrit l’absorption d’énergie par l’oscillateur. En effet,  $m\phi(t) = F(t)$  est la force *extérieure* ; par conséquent, le travail de cette force est par définition

<sup>57</sup>De la même façon, la fonction retardée est :

$$G_{ret}(t, t') = -\frac{1}{\tilde{\omega}_0} \theta(t' - t) e^{-\gamma(t-t')} \sin \tilde{\omega}_0(t - t') \neq G_{av}(t', t) \tag{9.125}$$

La symétrie de renversement du temps est brisée par l’amortissement, comparer avec la note 47.

<sup>58</sup>Attention : l’usage est fréquent de noter  $\mathcal{G}'$  et  $\mathcal{G}''$  respectivement les parties réelle et imaginaire de  $\mathcal{G}$ , mais il ne s’agit pas de ses dérivées !

<sup>59</sup>Si on inverse la convention de définition de la transformation de Fourier, les deux demi-plans s’échangent.

l'énergie reçue par l'oscillateur :  $dW = Fdx = F\dot{x}dt$ . L'énergie totale fournie à (absorbée par) l'oscillateur est donc<sup>60</sup> :

$$\Delta E = \int_{-\infty}^{+\infty} F\dot{x}dt \equiv \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} F\dot{x} e^{i\omega t} dt \right]_{\omega=0} = \mathcal{F}[F\dot{x}](\omega=0) . \quad (9.132)$$

On a  $\mathcal{F}[\dot{x}] = -i\omega\mathcal{F}[x]$  ; en supposant l'oscillateur au repos avant l'arrivée de la perturbation  $\phi$ , la solution homogène est identiquement nulle et il reste seulement  $\mathcal{F}[x] = \mathcal{G}(\omega)\Phi(\omega)$  (voir (9.110)). Par le théorème de convolution, il vient alors :

$$\mathcal{F}[F\dot{x}](\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} m\Phi(\omega - \omega')[-i\omega'\mathcal{G}_{\text{av}}(\omega')\Phi(\omega')] d\omega' , \quad (9.133)$$

de sorte que l'énergie absorbée est donnée par :

$$\Delta E = \frac{m}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(-\omega')\omega'\mathcal{G}_{\text{av}}(\omega')\Phi(\omega') d\omega' . \quad (9.134)$$

En outre, comme  $\Phi$  est la transformée de Fourier d'une fonction réelle,  $\Phi(-\omega) = \Phi(\omega)^*$  ; d'où :

$$\Delta E = \frac{m}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega'\mathcal{G}_{\text{av}}(\omega')|\Phi(\omega')|^2 d\omega' , \quad (9.135)$$

et, en vertu des symétries exprimées par (9.129), seule la partie imaginaire contribue à l'intégrale :

$$\boxed{\Delta E = \frac{m}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega' |\Phi(\omega')|^2 \Im \mathcal{G}_{\text{av}}(\omega') d\omega' = \frac{m}{\pi} \int_0^{+\infty} \omega' |\Phi(\omega')|^2 \Im \mathcal{G}_{\text{av}}(\omega') d\omega'} \quad (9.136)$$

Ainsi, la partie imaginaire de la fonction de Green avancée donne-t-elle directement l'énergie absorbée par l'oscillateur. Dans le cas d'une source quasi-monochromatique à  $\omega_e$ , de durée  $T \gg \omega_e^{-1}$ ,  $\Phi(\omega)$  est un précurseur  $\delta_{1/T}(\omega \pm \omega_e)$  de  $\delta(\omega \pm \omega_e)$ , qui va filtrer l'intégrand ; au total, on trouve que l'énergie absorbée est proportionnelle à  $T\Im\mathcal{G}(\omega_e)$  : l'énergie moyenne absorbée par unité de temps,  $\frac{\Delta E}{T}$ , varie comme  $\Im\mathcal{G}(\omega_e)$ , elle est d'autant plus grande que la pulsation de la source est voisine de la pulsation propre  $\omega_0$  de l'oscillateur. En outre, dans la limite  $\gamma = 0+$ ,  $\Delta E = 0$  : si l'oscillateur est non-amorti (isolé), son énergie est constante... comme il se doit.

Tous ces résultats s'appliquent à un oscillateur harmonique amorti, quelle que soit sa nature physique précise. Par exemple, pour un circuit RLC aux bornes duquel on applique la tension  $v(t)$ , l'équation pour l'intensité  $i(t)$  est :

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \dot{v}(t) . \quad (9.137)$$

Par rapport à l'oscillateur matériel de référence, le dictionnaire des paramètres est le suivant :

$$m \leftrightarrow L , \quad R \leftrightarrow \gamma , \quad \frac{1}{C} \leftrightarrow \omega_0^2 . \quad (9.138)$$

L'inductance joue bien un rôle inertiel, en s'opposant aux variations brusques de courant (elle arrondit les sauts), la résistance est bien le terme dissipatif, quant à  $C^{-1}$ , c'est bien ce qui rappelle l'intensité vers la valeur zéro. La condition de résonance du circuit est  $LC\omega^2 = 1$ , en conformité avec  $\omega = \omega_0$  pour l'oscillateur matériel.

<sup>60</sup>Ici, pas de terme de chaleur  $dQ$  !



# Bibliographie

- [1] Émile BOREL, *Le Hasard* (PUF, Paris, 1948)
- [2] Walter APPEL, *Mathématiques pour la physique et les physiciens* (H & K Éditions, Paris, 2002)
- [3] Jean BASS, *Cours de mathématiques* (Masson, Paris, 1968)
- [4] V.I.SMIRNOV, *A course of Higher Mathematics. I*, (Pergamon Press, Oxford, 1964)
- [5] Tristan NEEDHAM, *Visual Complex Analysis*, (Clarendon Press, Oxford, 1997)
- [6] Carl M. BENDER et Steven A. ORSZAG, *Advanced Mathematical Methods For Scientists And Engineers* (McGraw-Hill, Singapour, 1984)
- [7] Edward Charles TITCHMARSH, *The Theory of Functions*, (Oxford University Press, 1976)
- [8] E.T. WHITTAKER et G.N. WATSON, *A Course of Modern Analysis*, (Cambridge University Press, 1988)
- [9] Hubert KRIVINE, *Exercices de mathématiques pour physiciens* (Cassini, Paris, 2003)
- [10] Mikhaïl LAVRENTIEV et Boris CHABAT, *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe* (Éditions Mir, Moscou, 1972)
- [11] Jon MATTHEWS et R.L. WALKER, *Mathematical Methods of Physics* (Benjamin, New York, 1965)
- [12] N. PISKOUNOV, *Calcul différentiel et intégral*, tomes I et II, (Éditions Mir, Moscou, 1970)
- [13] Laurent SCHWARTZ, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques* (Hermann, Paris, 1968)
- [14] Jacques HARTHONG, cours d'Analyse et de Probabilités disponibles en ligne à l'adresse :  
<http://moire4.u-strasbg.fr/JHbooks>
- [15] William FELLER, *An introduction to probability theory and its applications*, Vol. I (J. Wiley, New York, 1971)
- [16] Albert RENYI, *Calcul des probabilités* (Dunod, Paris, 1966)
- [17] Marek FISZ, *Probability theory and mathematical statistics* (Wiley, New York, 1963)

En outre, il existe de nombreux sites très intéressants par le souci pédagogique de leur(s) auteur(s), et parfaitement accessibles au niveau L3.

L'un d'entre eux, particulièrement remarquable, est celui dû à Serge MEHL :

<http://www.chronomath.com/>

# Index